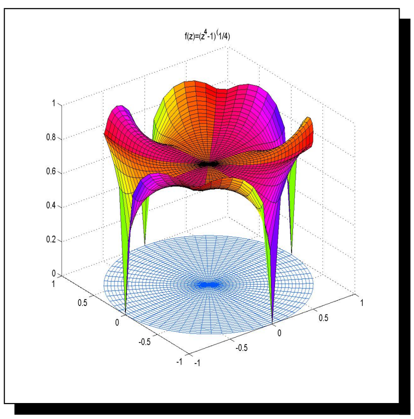
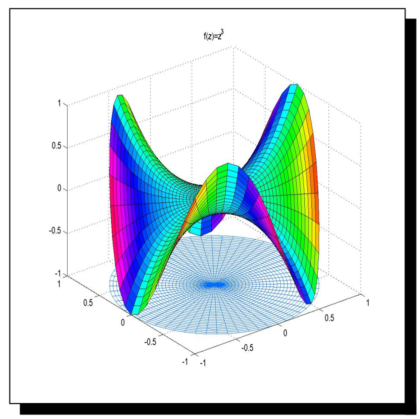
Université Hassan II- Casablanca

Faculté des Sciences et Techniques de Mohammedia

Suites et séries de fonctions
Analyse complexe



Cours



Parcours MIP **Promo 2015-2016**

Par : Dr Mohammed Harfaoui

‖ Dieu a crée les nombres, le reste est l'oeuvre de l'homme.

‖ L'enseignement est un habit tout fait et pas un habit sur mesure.

‖ Si l'esprit d'un homme s'égare, faites-lui étudier les mathématiques car dans les démonstrations, pour peu qu'il s'écarte, il sera obligé de recommencer.

‖ Pour l'enseignant il ne s'agit pas d'aimer ou de détester, il s'agit avant tout de ne pas se tromper. [André Lévy]

‖ On n'enseigne pas ce que l'on sait ou ce que l'on croit savoir : on n'enseigne et on ne peut enseigner que ce que l'on est.

‖ Quand une société ne peut pas enseigner, c'est que cette société ne peut pas s'enseigner. [Charles Péguy]

‖ La science, c'est ce que le père enseigne à son fils. La technologie, c'est ce que le fils enseigne à son papa. [Michel Serres]

‖ Une société qui n'aime pas ses enseignants est une société qui n'a pas compris le défi de la mondialisation de demain. [Valérie Pécresse]

‖ Il y a des sciences bonnes dont l'existence est nécessaire et dont la culture est inutile. Telles sont les mathématiques. [Joseph Joubert]

‖ Les mathématiques sont une gymnastique de l'esprit et une préparation à la philosophie. [Isocrate]

‖ La musique est une mathématique sonore, la mathématique une musique silencieuse. [Edouard Herriot]

‖ Dieu n'est pas l'éternité, il n'est pas l'infini, mais il est éternel et infini. Il n'est ni la durée ni l'espace ; mais il a existé de tout temps et sa présence est partout. [Isaac Newton]

‖ La vie n'est belle qu'à étudier et à enseigner les mathématiques.

TABLE DES MATIÈRES

Mathématiciens du chapitres

Fig. 1 – CAUCHY baron Augustin-Louis

Fig. 2 – Jean le Rond d'ALEMBERT

1. Bernoulli Jacob 1654-1705 Mathématicien suiss de la grande famille des Bernoulli. On lui doit des travaux sur les courbes, les coordonnées polaires, le calcul intégral, les séries numériques...C'est lui qui a montré la convergence de

$$\sum \frac{1}{n^2}.$$

2. Euler Léonard 1707-1783 L'apport de ce mathématicien suisse est que considérable. La définiton précise e, l'exponentielle complese, les équations différentielles, les courbes paramétrées, les quadratiques, et autres, de nombreux résultats sur les séries numériques...

3. Abel Niels Henrick, norvégien, 1802-1829. (A fin de pallier l'absence d'un prix Nobel de mathématiques, le gouvernement norvégien a créé en 2002, un " prix Abel " à l'occasion du bicentenaire de sa naissance (5 août 1802). D'un montant annuel de 625000 euros, il concurrence ainsi la médaille Fields, d'origine canadienne, accordée tous les quatre ans. Le premier prix a été décerné le 3 avril 2003 au mathématicien français Jean-Pierre Serre.)

CHAPITRE

1

Suites et séries de fonctions

1.1 Suites de fonctions et propriétés

1.1.1 Définitions et notations

On a déja remarqué qu'un nombre peut s'exprimer cpmme la limite d'une suite ou comme la somme d'une série. Il est donc naturel d'étudier la représentation de certaines fonctios comme limite d'une suite de fonctions ou somme d'une série de fonctions, et une question fondamentale est alors l'étude des propriétés de ces fonvctions limites ou de ces fonctions sommes : continuités, dérivabilités, intégrabilité etc...

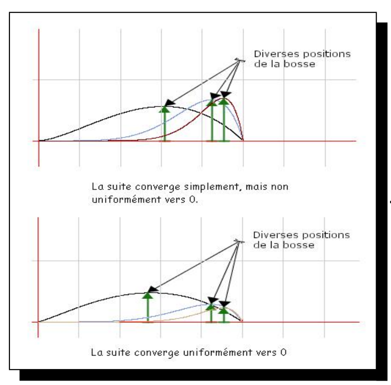
Essayons d'interpréter la différence entre la convergence simple et la convergence uniforme sur le dessin suivant on a représenté en haut la suite de fonctions

$$f_n(x) = nx^n(1-x),$$

et en bas

$$g_n(x) = \sqrt[4]{n}x^n(1-x).$$

Pour trois valeurs de n différentes (en noir, $n = 5$, en bleu, $n = 25$, en marron $n = 50$).
La bosse correspond à $\| f_n - f \|_\infty$..



Dans les deux cas, elle se déplace vers la gauche, ce qui va entraîner la convergence simple : tout point de $[0, 1[$ sera à un moment donné à gauche de cette bosse, et on aura $f_n(x)$

comme $g_n(x)$ qui tendront vers 0. En revanche, dans le premier cas, la bosse ne s'aplatit pas : il n'y aura donc pas convergence uniforme. En bas, la bosse s'aplatit, et elle va même tendre vers 0 : cela signifie que la suite g_n converge uniformément vers 0.

Définition 1.1.1
Soit P une partie de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$ et $\mathcal{F}(P,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions numériques bornées sur P. On appelle suite de fonctions toute application :

$$\begin{cases} J \subset \mathbb{N} \longmapsto \mathcal{F}(P,\mathbb{R}) \\ \quad n \longrightarrow f_n, \end{cases}$$

qu'on note $(f_n)_{n\in J}$.

Exemple 1.1.1.1
Soit $(f_n)_{n\in N}$ la suite de fonctions définies par :

$$f_n(x) = nx^2e^{-nx}, n \geq 0.$$

On a représentaté les fonctions $f_0, f_1, f_2, f_5, f_{10}, f_{20}, f_{25}$ et f_{50}. Les graphes de ces fonctions sont placés de haut en bas à partir de f_1.

On remarque que plus n devient grand plus la courbe se deplace vers le bas pour $x \geq 0$. Cela signifie que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.

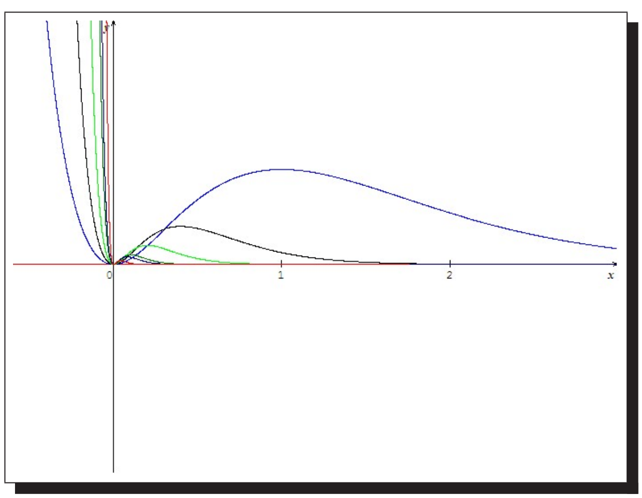


FIG. 1.1 – $f_n(x) = nx^2e^{-nx}$

Avec Maple

$> plot(seq((k*x^2*exp(-k*x)), k = [0, 1, 2, 3, 5, 7, 10]),$
$x = 0..infinity, color = [black, red, blue, green]);$

1.1.2 Convergence des suites de fonctions

1.1.2.1 En route vers les définitions.

1. Étude de la suite de fonctions définies par $f_n(x) = 1 - x^n$

   sur $]0,1[$ et $]0,\dfrac{1}{2}[$.

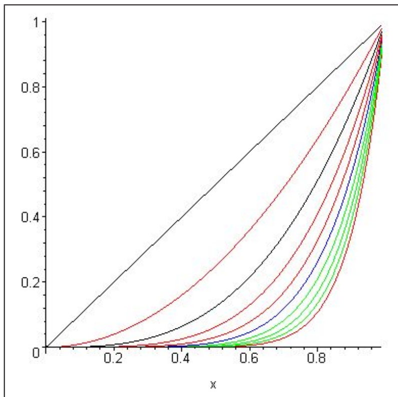


FIG. 1.2 – $f_n(x) = 1 - x^n$ sur [0,1]

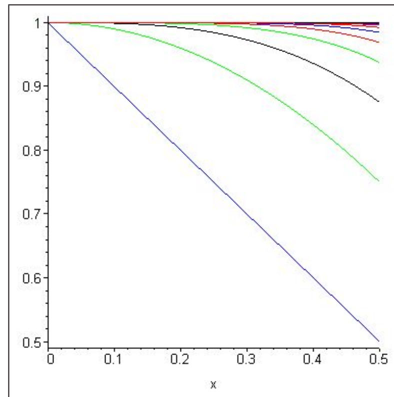


FIG. 1.3 – $g_n(x) = 1 - x^n$, sur [0,1/2]

Avec Maple

$> plot(seq(1 - x^k, k = 1..10), x = 0..99/100, color = [red, black]);$
$> plot(seq(1 - x^k, k = 1..10), x = 0..99/100, color = [red, blue, green, black]);$

   (a) **Sur** $]0,1[$, on a : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) = 1$.

   Donc $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \iff |x|^n < \varepsilon \iff n > \dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|x|}$car $|x| < 1$, on prend $N_{x,\varepsilon} = \left[\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|x|}\right]$(partie entière) qu'on ne peut pas minorer d'une manière indépendante de x. On dit que la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction f définie par : $f(x) = 1$.

   (b) **Sur** $]0,\dfrac{1}{2}[$, on a : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) = 1$.

   Donc $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \iff |x|^n < \varepsilon \iff n > \dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|x|}$, car $|x| < \dfrac{1}{2}$, mais $|x| > \dfrac{1}{2}$ donc $\ln|x| > -\ln 2$ et $\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|x|} > -\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln 2}$, on prend $N_\varepsilon = \left[-\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln 2}\right]$ qui ne dépend pas de x .
   On dit que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction f définie par : $f(x) = 1$.

2. Étude de la suite de fonctions définies par $f_n(x) = x^n$, sur $]0,1[$ et $]0,\dfrac{1}{2}[$.

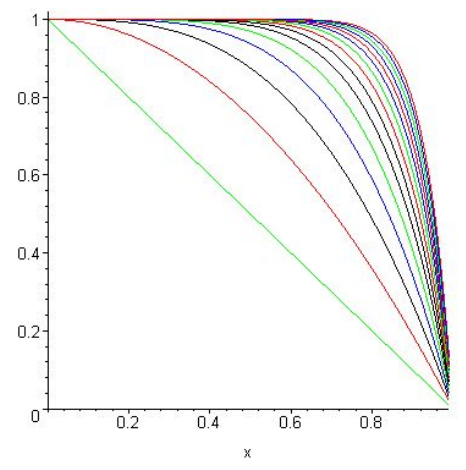


FIG. 1.4 – $f_n(x) = x^n$ sur [0,1]

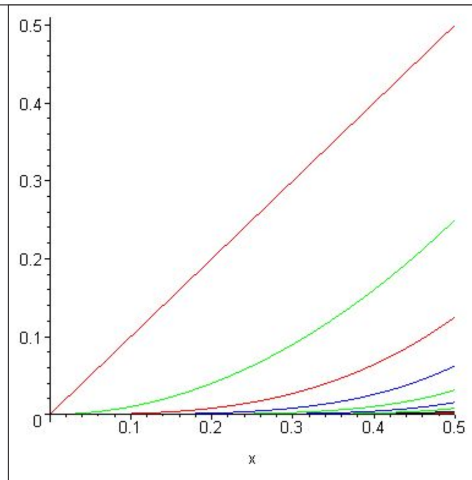


FIG. 1.5 – $g_n(x) = x^n$, sur [0,1/2]

Avec Maple

$> plot(seq(x^k, k = 1..15), x = 0..1/2,$
$color = [red, black, green, green, green, black, red, red, blue]);$

1.1.2.2 Représentation de quelques fonctions.

1. Étude de la suite $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}, x \geq 0$, (fig :4.3). On a $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x) = f(x) = 0$.

   Avec Maple

   $> plot(seq((k^2 * x * exp(-k * x)), k = 1..10),$
   $x = 0..infinity, color = [black, red, blue, green]);$

   On remarque que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \sup\limits_{x \in I} | f_n(x) - f(x)| = +\infty$. On dit ici que la convergence n'est pas uniforme.

2. Étude de la suite $f_n(x) = n^2 x^2 e^{-nx}, x \geq 0$, (fig :4.4). On a $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x) = f(x) = 0$.

   Avec Maple

   $> plot(seq((k^2 * x^2 * exp(-k * x)), k = 1..10),$
   $x = 0..infinity, color = [black, red, blue, green]);$

   On remarque que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \sup\limits_{x \in I} | f_n(x) - f(x)| = \dfrac{4}{e^2}$. On dit ici que la convergence n'est pas uniforme.

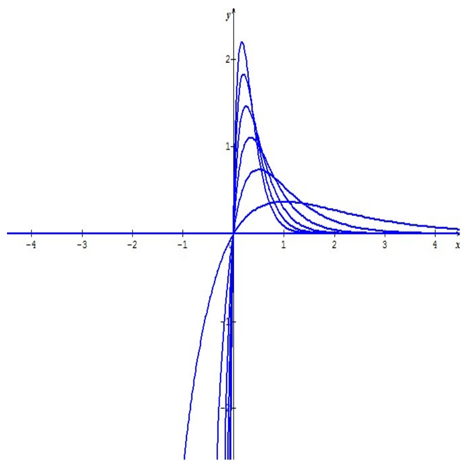


FIG. 1.6 – $g_n(x) = n^2xe^{-nx}; n = 0, .., 10$

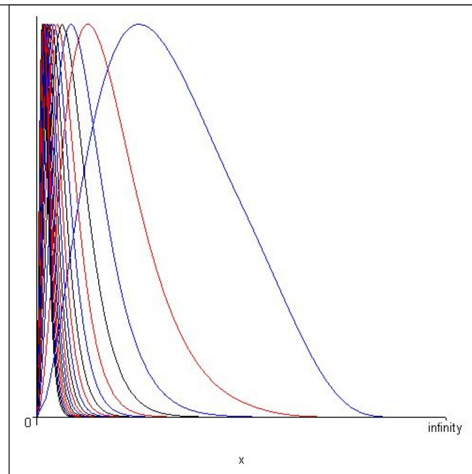


FIG. 1.7 – $g_n(x) = n^2x^2e^{-nx}; n = 0, .., 18$

3. Étude de la suite $f_n(x) = nx^2e^{-nx}, x \geq 0$, (fig :4.5).
   On a : $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x) = f(x) = 0$.

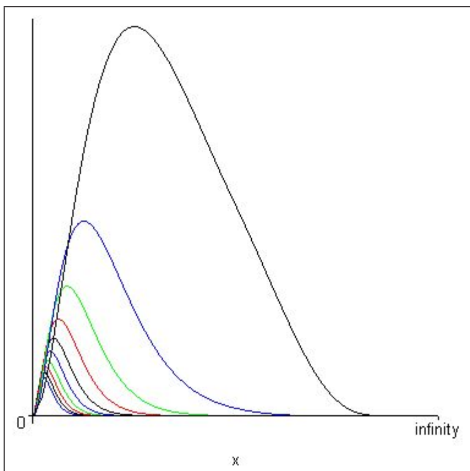


FIG. 1.8 – $g_n(x) = nx^2e^{-nx}; n = 0, 1, 2, 5, 10, 12, 20, 25$, en haut n=25, en bas n=0

Avec Maple

$> plot(seq((k * x^2 * exp(-k * x)), k = 1..15),$
$x = 0..infinity, color = [black, red, blue, green]);$

On remarque que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \sup\limits_{x \in I} | f_n(x) - f(x)| = 0$. On dit ici que la convergence est uniforme.

1.1.2.3 Convergence simple des suites de fonctions

Définition 1.1.2
On dit que la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction f définie sur I si $\forall x \in I$, la suite numérique $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$, donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\ N_{x,\varepsilon} \in N \text{ tel que } |\ f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Remarquer que $N_{x,\varepsilon}$ dépend de x et ε.

Exemple 1.1.2.1
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies par :

$$f_n(x) = nx^2 \sin(\frac{x}{n}),\ n \geq 1.$$

On a $f_n(x) = 0$, *si* $x = 0$, *et si* $x \neq 0$, $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} nx^2 \sin(\frac{x}{n}) = x^3$.

Donc la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction f définie sur R par : $f(x) = x^3$.

1.1.2.4 Convergence uniforme des suites de fonctions

Définition 1.1.3
On dit que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction f définie sur I si : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \sup\limits_{x\in I} |\ f_n(x) - f(x)| = 0$.
Donc : $\forall \varepsilon > 0, \exists\ N_\varepsilon \in N$ *tel que* $|\ f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Exemple 1.1.2.2 *Soit $(f_n)_{n\in N}$ la suite de fonctions définies par :*

$$f_n(x) = nx^2 e^{-nx}, n \geq 0, et\ x \geq 0.$$

On a $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) = 0$, *et* $|\ f_n(x) - f(x)| = nx^2 e^{-nx} = g(x)$. *Une étude de la fonction g montre que :*

$\sup\limits_{x\in I} g(x) = \sup\limits_{x\in I} |\ f_n(x) - f(x)| = \frac{e}{n}$, *et* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \sup\limits_{x\in I} |\ f_n(x) - f(x)| = 0$, *d'où la convergence uniforme sur* $\mathbb{R}_+$.

Exercice 1.1.1
Étudier la convergence de la suite $f_n(x) = nsin(x/n)$.

Cette de fonctions converge simplement vers la fonction f définie par : $f(x) = x$.
Étude de la convergence uniforme sur [0,1].
Soit $g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = x - xsin(x/n)$.

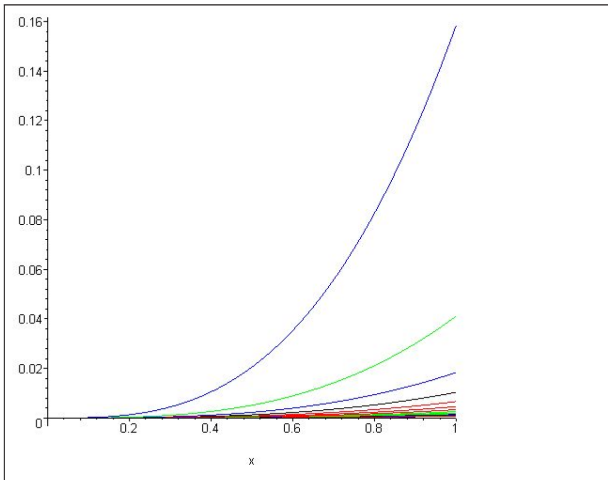


FIG. 1.9 – $x - xsin(x/n)$,n=0..15

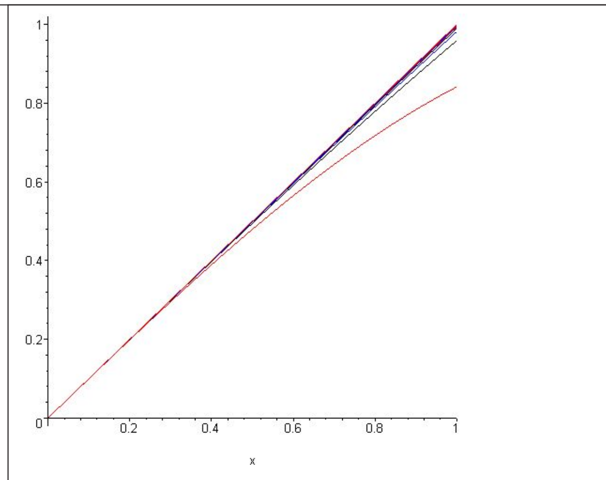


FIG. 1.10 – x et $x - xsin(x/n)$,n=0..15

Avec Maple

$> plot(x, seq(k * sin(x/k), k = 1..15), x = 0..1, color = [red, blue, blue, black, black, red]);$
$> plot(seq(x - k * sin(x/k), k = 1..15), x = 0..1, color = [red, blue, green, black]);$

On a $\lim_{n \longrightarrow +\infty} | f_n(x_n) - f(x_n)| = 0$.

Donc (f_n) converge uniformément vers $f(x) = x$ sur $[0, 1]$.

Exercice 1.1.2

Étudier la convergence de la suite : $f_n(x) = \dfrac{n(x^3 + x)e^{-x}}{nx + 1}$ *sur* $[0, 1]$ *et* $[a, 1]$*, pour* $a > 0$.

1- Convergence simple (On a utilisé Maple pour calculer la limite simple).

begincenter begintabular—c—

Avec Maple

$fn := (n, x) -> (n * (x^3 + x) * exp(-x))/(n * x + 1)$;(1)
$f := unapply(limit(fn(n, x), n = infinity), x)$;(2)
$> plot(f(x), seq(fn(k, x), k = 1..10), x = 0..1)$;(3)

(1) pour écrire la fonction.

(2) pour calcuer la limite.

(3) pour représenter la suite de fonction et la fonction limite.

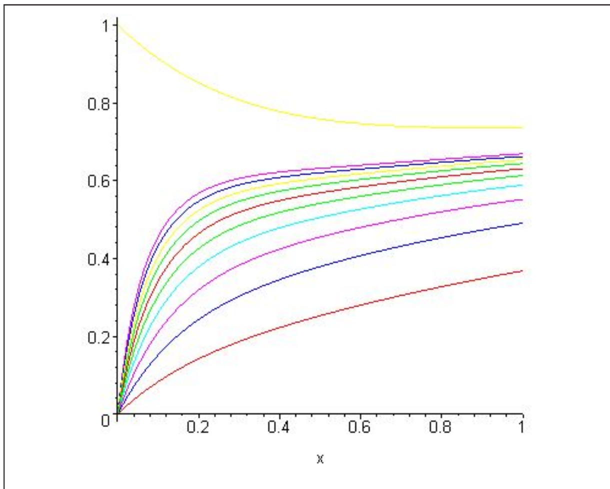


FIG. 1.11 – $f(x) = (x^2 + x)e^{-x}, f_n = n(x^3 + x)e^{-x}/(nx + 1); n = 1..10$

2.Convergence uniforme

On a $0 \leq f(x) - f_n(x) \leq \dfrac{1}{nx+1}$.

1. Pour $x \in [a, 1]$, $0 \leq f(x) - f_n(x) \leq \dfrac{1}{na+1}$ (majoration indépendante de x) et

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{na+1} = 0.$$

   Donc la convergence est uniforme.

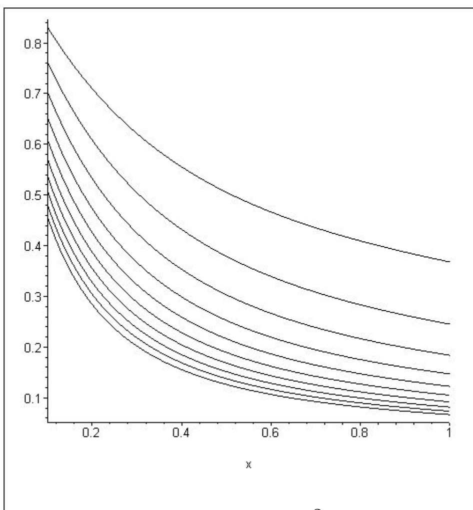


FIG. 1.12 – $g_n(x) = (x^2 + x)e^{-x} - n(x^3 + x)e^{-x}/(nx + 1); n = 1..10$

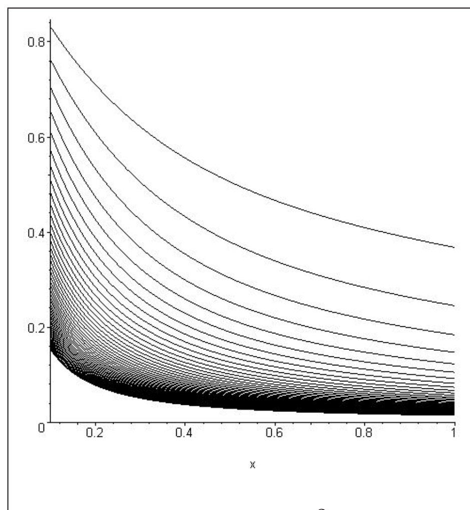


FIG. 1.13 – $g_n(x) = (x^2 + x)e^{-x} - n(x^3 + x)e^{-x}/(nx + 1); n = 1..50$

2. Pour $x \in [0, 1]$; on prend la suite $x_n = \dfrac{1}{n}$, alors

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} (f(\frac{1}{n}) - f_n(\frac{1}{n})) = \frac{1}{2} \neq 0$$

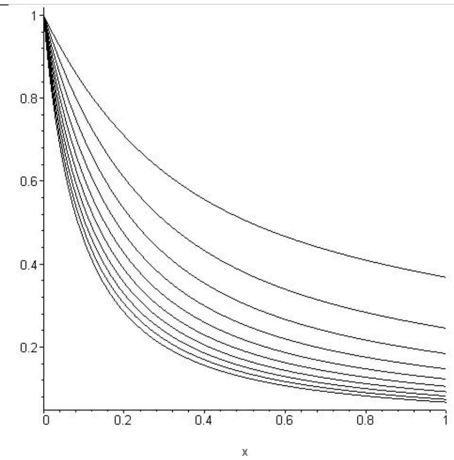


FIG. 1.14 – $g_n(x) = (x^2 + x)e^{-x} - n(x^3 + x)e^{-x}/(nx + 1); n = 1..10$

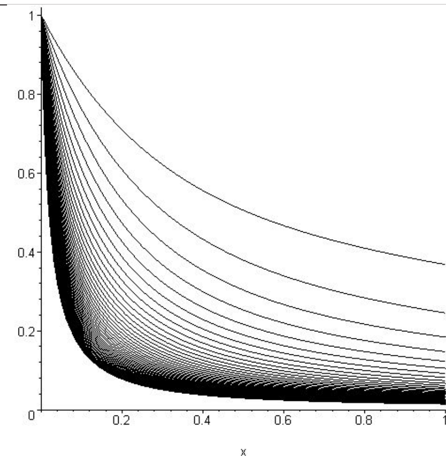


FIG. 1.15 – $g_n(x) = (x^2 + x)e^{-x} - n(x^3 + x)e^{-x}/(nx + 1); n = 1..50$

Remarque 1.1.1

S'il existe une suite $(x_n)_n$ éléments de telle que :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} |\ f_n(x_n) - f(x_n)| \neq 0,$$

alors la suite $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers la fonction f.

La suite définie par :

$$f_n(x) = n\sin(\frac{x}{n}),\ n > 0,$$

converge uniformément vers $f(x) = x$ sur $[0, 1]$ et pas sur $\mathbb{R}$ car :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} |\ f_n(x_n) - f(x_n)| \neq 0,$$

avec $x_n = n$.

1.1.3 Limite uniforme et continuité de la somme

Théorème 1.1.1
Soit $(f_n)_n$ suite de fonctions définies sur un intervalle I, continues en x_0 (résp. sur I) convergeant uniformément vers une fonction f . Alors f est continue en x_0 (résp.sur I.

Preuve. Soit $x_0 \in I$, on a $\forall\varepsilon > 0$
$\exists\ \eta > 0$, tel que $(x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\Rightarrow |\ f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\epsilon}{3})$. (continuité de f)
$\exists\ N_\varepsilon \in N$ tel que $|\ f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}$.(convergence uniforme)
$\exists\ N_\varepsilon \in N$ tel que $|\ f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}$. (convergence uniforme).
Donc $\forall\varepsilon > 0, \exists\ \eta > 0$, tel que (x$\in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\Rightarrow |\ f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Remarque 1.1.2 - *Ceci veut dire que :* $\lim\limits_{n\to+\infty}(\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)) = \lim\limits_{x\to x_0}(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x))$.

1.1.4 Limite uniforme et intégrale de la somme

Question. Si $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) = f(x)$ et f_n et $f$sont intégrales que peut-on dire de : $\int_a^b (\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x))dx$ et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \int_a^b f_n(x)dx$?.

Théorème 1.1.2
Soit $(f_n)_n$ suite de fonctions définies continues sur $[a,b]$ convergeant uniformément vers une fonction f (continue), alors pour tout $x \in [a,b]$, la suite de fonctions $(F_n)_n$ définie par :

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t)dt$$

converge uniformément vers la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Démonstration
On a $\forall x \in [a,b]$, $|F_n(x) - F(x)| \leq \int_a^x |f_n(t) - f(t)|\,dt \leq (b-a)\sup\limits_{t\in[a,b]} |f_n(t) - f(t)|$
d'où : $0 \leq \sup\limits_{x\in[a,b]} |F_n(x) - F(x)| \leq (b-a)\sup\limits_{t\in[a,b]} |f_n(t) - f(t)|$,
et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(\sup\limits_{t\in[a,b]} |f_n(t) - f(t)|) = 0$, donc $(F_n)_n$ converge uniformément vers la fonction F.

Remarque 1.1.3
Ceci veut dire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^x f_n(t)dt = \int_a^x (\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t))dt$.

1.1.5 Limite uniforme et dérivée de la somme

Question : Si $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) = f(x)$ et f_n et f sont de classe $\mathcal{C}^1$ que peut-on dire de

$$(\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n)'(x) \text{ et } \lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n'(x)?$$

Exemple 1.1.5.1
Soit la suite définie par $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}}$.

1. *Convergence simple de $(f_n)_n$.*
   On a $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) = |x| = f(x)$ d'où la convergence simple de $(f_n)_n$ vers f.
2. *Convergence uniforme de $(f_n)_n$.*
   On a $0 \leq |f_n(x) - f(x)| \leq \dfrac{1}{n}$, donc $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\sup\limits_{x\in I} |f_n(x_n) - f(x_n)| = 0$, d'où la convergence uniforme de $(f_n)_n$ vers f.

3. *Convergence simple de* $(f'_n)_n$.

   On a $f'_n(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}}}$ *et* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f'_n(x) = g(x) = \begin{cases} 0, & si\, x = 0 \\ \dfrac{x}{|x|}, & si\, x \neq 0 \end{cases}$

   Les f'_n *sont dérivables mais* g *n'est même pas continue. Cependant on a le théorème suivant qu'on admettra :*

Soit $C^1(\mathrm{I},\mathbb{R})$ l'espace des fonctions de classe C^1 de I dans $\mathbb{R}$, I est un intervalle non réduit à un point.

Théorème 1.1.3
Soit $(f_n)_n$ *suite de fonctions de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur un intervalle* I *telle que :*

1. *la suite* $(f_n)_n$ *converge* **simplement** *vers une fonction* f *définie sur* I*.*
2. *la suite* $(f'_n)_n$ *converge simplement vers une fonction* g *définie sur* I*, et* **uniformément** *sur tout* **compact** *de* I*.*

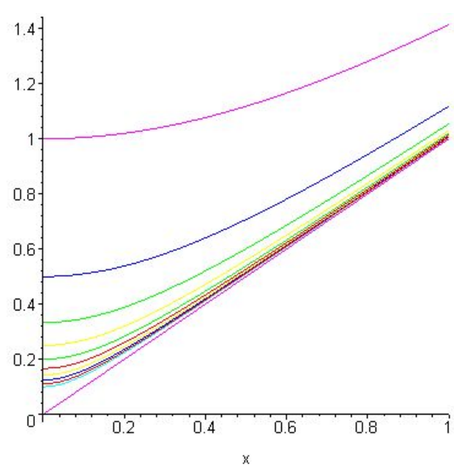
Alors :
– f *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *et on a* $f' = g$*. sur* I
– *La siuie de fonctions* $(f_n)_n$ *converge uniformément tout compact* $[a, b]$ *de* I

1.1.6 Utilisation de Maple

Soit la suite de fonctions définie par : $f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n^2}$.

1. Pour définir la fonction : Écrire $> fn := (n, x)- > (sqrt(x^2 + (1/n^2)))$; Taper entrer et lae résultat est $fn := (n, x)- > \sqrt{x^2 + 1/n^2}$;
2. Calcul de la limite.
   Écrire $> f := unapply(limit(fn(n, x), n = infinity), x)$;
   Taper entrer et le résultat est $f := x- > \sqrt{x^2}$
3. Représentation graphique.

Écrire $> plot(f(x), seq(fn(k, x), k = 1..10), x = 0..1)$;
Taper entrer et le résultat est

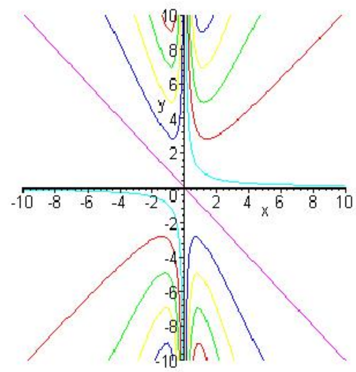


Soit la suite de fonctions définie par :$f_n(x) = (kx^2 + k + 1)/x$.

$> simplify(f(x,k));$

$> plot(seq(f(x,k),k=-5..5),x=-10..10,y=-10..10,scaling=constrained);$

Écrire $> \quad plot(seq(f(x,k),k=-5..5),x=-10..10,y=-10..10,scaling=constrained);$
Taper entrer et le résultat est



1.2 Séries de fonctions

1.2.1 Définitions et généralités

Définition 1.2.1
Soit $(f_n)_{n\geq n_0}$ une suite de fonctions définies sur une partie P de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle série de fonctions de terme général f_n , qu'on note $\sum f_n \ (n \geq n_0)$, la suite $(S_n)_{n\geq n_0}$ définie sur P par :

$$\forall x \in P : S_n(x) = \sum_{k=n_0}^{n} f_k(x),$$

la suite $(S_n)_{n\geq n_0}$ est appelée suite associée à la série $\sum f_n \ (n \geq n_0)$ ou suite des sommes partielles de la série $\sum f_n$.

Exemple 1.2.1.1 $\sum \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}, \ \sum 1 - x^n, \ \sum \frac{1}{n^2}, \ \sum nx^2 e^{-nx}, \quad \sum \frac{sin(nx)}{x^2+n^2}$, *sont des séries de fonctions.*

1.2.2 Convergence uniforme des séries de fonctions.

Définition 1.2.2 ***(convergence simple et uniforme).***
On dit qu'une série $\sum f_n(n \geq n_{0})$ *converge simplement (uniformément) sur* P*, vers une fonction* S*, qu'on note* $S\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n$*, si la suite* $(S_n)_{n\geq n_0}$ *converge simplement (uniformément) sur* P*, vers la fonction* S*.*

Exemple 1.2.2.1
Soit la série $\sum f_n$*,définie par :* $f_n(x) = x^2e^{-nx}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \geq 0$.

On a : $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) = S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^2e^{-nx} = x^2\sum_{k=0}^{n} e^{-nx} = x^2\sum_{k=0}^{n}(e^{-x})^n.$

Donc $S(x) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} x^2e^{-nx} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} x^2\sum_{k=0}^{n}(e^{-x})^n = \dfrac{x^2}{1-e^{-x}}.$

1.2.3 Convergence absolue des séries de fonctions.

Définition 1.2.3
On dit qu'une série $\sum f_n(n \geq n_{0})$ *converge absolument, si la série* $\sum |f_n|$ *converge simplement.*

Proposition 1.2.1
Si $\sum f_n(n \geq n_{0})$ *converge absolument, alors la série* $\sum |f_n|$ *converge simplement.*

1.2.4 Convergence normale des séries de fonctions.

Définition 1.2.4
On dit qu'une série $\sum f_n(n \geq n_{0})$*, définie sur* P *converge normalement sur* P*, s'il existe une série numérique* $\sum u_n$ *convergente telle que :*
$\forall x \in P$, $|f_n(x)| \leq u_n$.

Exemple 1.2.4.1
La série $\sum \dfrac{(-1)^n \sin(nx)}{x^2+n^2}(n \geq 0)$*, est normalement convergente sur* $\mathbb{R}$ *car :*

$\forall x \in P, \left|\dfrac{(-1)^n \sin(nx)}{x^2+n^2}\right| \leq \dfrac{1}{n^2}$*, et* $\sum \dfrac{1}{n^2}$ *est une série numérique convergente (série de Riemann).*

Remarque 1.2.1
Il est préférable de commencer toujours par vérifier cette convergence elle est la plus forte.

Proposition 1.2.2

1. *Si* $\sum f_n(n \geq n_{0)}$ *converge uniformément, alors la série* $\sum f_n$ *converge simplement.*
2. *Si* $\sum f_n(n \geq n_{0)}$ *converge normalement, alors la série* $\sum f_n$ *converge simplement et uniformément.*

Remarque 1.2.2

La converge uniforme n'implique pas la convergence normale.

Considérer la série de fonction de terme général :

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n x}{n^2 + x^2}$$

pour $x \geq 0$.

Utiliser le fait que la série est altérneé et la majoration du reste pour montrer la convergence uniforme

1.2.5 Intégration et dérivation termes à termes

1.2.5.1 Intégration et convergence uniforme

Soit $C([a, b], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de [a,b] dans $\mathbb{R}$

Théorème 1.2.1
Soit $\sum f_n(n \geq n_0)$ *une série de fonctions définies continues sur* $[a, b]$ *convergeant uniformément vers une fonction* $S = \sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n$ *(continue). Alors*

$$\int_a^b (\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x))dx = \sum_{n=n_0}^{+\infty} (\int_a^b f_n(x)dx).$$

Preuve. Pour la démonstration on applique le théorème (A-IV) à la suite de fonctions

$$S_n : n \longrightarrow \sum_{k=n_0}^{n} f_k$$

1.2.5.2 Dérivation et convergence uniforme.

Soit C^1(I,$\mathbb{R}$) l'espace des fonctions de classe C^1 de I dans $\mathbb{R}$, I est un intervalle non réduit à un point.

Théorème 1.2.2 *Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I telle que :*

1. *la série $\sum f_n$, $(n \geq n_0)$ converge* **simplement** *sur I vers une fonction S définie par :*

$$\forall\ x \in I \quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

2. *la série $\sum f'_n$ $(n \geq n_{0)}$ converge* **uniformément** *sur tout compact $[a, b]$ de I vers une fonction g définie sur I.*

Alors la fonction somme S définie sur I est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et on a :

$$\forall\ \ x \in I \quad S^{'}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f^{'}_n(x)$$

Preuve. Pour la démonstration on applique le théorème (A-V) à la suite de fonction $S_n : n \longrightarrow \sum_{k=n_0}^{n} f_k$.

Remarque 1.2.3

Dans le cadre de ce théorème la somme infinie et la dérivation commutent.

$$\forall\ x \in I \quad \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} f^{'}_n(x)$$

Corollaire 1.2.5.1

Série de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ soit $\sum f_n$une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I telle que :

1. *chaque série $\sum f_n^{(j)}$, $1 \leq j \leq k$ converge* **simplement** *sur I,*
2. *la série $\sum f_n^k$ $(n \geq n_{0)}$ converge* **uniformément** *sur tout compact $[a, b]$ de I vers une fonction g définie sur I.*

Alors la fonction somme $S : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur I par :

$$\forall\ x \in I \quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et on a :

$$\forall\ j = 1, 2, ..., k, \forall\ x \in I \quad S^{(j)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}(x)$$

Corollaire 1.2.5.2
Série de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$ soit $\sum f_n$ une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I telle que :

1. *pour tout $j \in \mathbb{N}$, la série $\sum f_n^{(j)}$, $1 \leq j \leq k$ converge* **simplement** *sur I,*
2. *il existe $p \in \mathbb{N}^*$, tel que pour tout $k \geq p$, la série $\sum f_n^k$ converge* **uniformément** *sur tout compact $[a, b]$ de I.*

Alors la fonction somme $S : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur I par :

$$\forall \ \ x \in I \quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et chaque série $\sum f_n^{(j)}(x)$, $j \in \mathbb{N}$ et on a :

$$\forall \ j \in \mathbb{N}, \forall \ x \in I \quad S^{(j)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}(x)$$

1.2.6 Utilisation de Maple

Soit la suite de fonction $f_n(x) = x^n - x^{n-1/2}$ définie sur $[0, 1]$ pour $n \geq 1$.

1. Montrer que la série de terme général f_n est convergente.
2. Calculer la somme $S_n(x)$.
3. La convergence est-elle uniforme.

Écrire $> fn := (n, x)- > x^n + -x^(n-1/2)));$ et taper entrer qui donne $fn := (n, x)- > x^n - x^{n-1/2}$;
La somme est
$> Sn := (n, x)- > sum(f('k', x), 'k' = 1..n)$; et la limite est
$> S := x- > sum(f('k', x), 'k' = 1..infinity)$;
qui donne $> S(x) : -\dfrac{x}{x-1} + \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$

1.3 Au point de vue pratique

1.3.0.1 Méthodes pour étudier une suite ou série de fonctions

1. L'étude d'une suite (ou d'une série) de fonctions commence le plus souvent par celle de la convergence simple. On fixe x et on étudie la suite (ou la série) numérique associée.

2. La convergence uniforme d'une suite (f_n) de fonctions est l'étude de la convergence de $(f_n - f)$ vers 0 dans l'espace vectoriel normé des fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ muni de la norme $\| \, . \, \|_\infty$, où $\| \, . \, \|_\infty = \max\limits_{x \in I} | f(x) |$ qui est un espace de Banach.

3. Pour étudier la convergence uniforme d'une suite de fonctions bornées sur I, on peut :

(a) chercher à majorer $|f_n(x) - f(x)|$ par un réel a_n ne dépendant pas de x et tendant vers 0 lorsque n tend vers l'infini ;

(b) faire l'étude, n étant fixé, de la fonction $f_n - f$ dans le but de déterminer $\| f_n - f \|_\infty$;

(c) majorer $|f_n - f|$ par une suite de fonctions dont la norme infinie est plus facile à calculer.

4. Pour montrer que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément sur I vers sa limite simple f, on peut :

(a) exhiber une suite (x_n) de points de I tels que la suite numérique $(f_n(x_n) - f(x_n))$ ne tende pas vers 0 ;

(b) faire l'étude à n fixé de la fonction $f_n - f$ dans le but de minorer $\| f_n - f \|_\infty$ par un réel α_n ne dépendant pas de x et ne tendant pas vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Lorsque les fonctions $f_n - f$ ne sont pas bornées sur I, ou lorsque la suite de fonctions ne converge pas uniformément sur I, on peut chercher à établir la convergence uniforme sur tout compact de I.

5. Pour étudier la convergence uniforme d'une série $\sum u_n$ de fonctions bornées sur I :

(a) si la série numérique $\sum u_n(x)$ vérifie, pour tout x, le critère des séries alternées, on majore le reste $|R_n(x)|$ par $|u_{n+1}(x)|$, puis on tente de majorer $|u_{n+1}(x)|$ par un réel a_n ne dépendant pas de x et tendant vers 0 lorsque n tend vers l'infini ;

(b) sinon, on peut essayer de majorer $|u_n(x)|$ par le terme général an ne dépendant pas de x d'une série convergente. La série de fonctions est alors normalement convergente. Lorsque la série de fonctions ne converge pas uniformément sur I, on peut chercher à établir la convergence uniforme sur tout compact de I.

6. Pour montrer qu'une fonction f limite d'une suite de fonctions (f_n) est continue sur I, il suffit d'établir

(a) les fonctions f_n sont continues sur I ;

(b) la convergence de la suite (f_n) vers f est uniforme sur tout compact de I.

7. Pour montrer qu'une fonction S somme d'une série de fonctions $\sum u_n$ est continue sur I, il suffit d'établir :

(a) les fonctions un sont continues sur I ;

(b) la convergence de la série $\sum u_n$ un vers S est uniforme sur tout compact de I.

8. Pour déterminer la limite en un point a, adhérent à son domaine de définition, d'une fonction f, limite d'une suite de fonctions (f_n), on utilise le théorème d'interversion des limites.

9. Pour montrer qu'une suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément sur I, on pourra prouver que, en un point a adhérent à I, les fonctions f_n admettent une limite b_n, mais que la suite (b_n) diverge.

1.3.0.2 Pièges à éviter en ce qui concerne les suites de fonctions

1. La convergence d'une suite de fonctions vers la fonction 0 n'implique par la convergence de la suite des intégrales vers 0.
2. La convergence d'une suite de fonctions vers la fonction 0 n'implique par la convergence vers 0 de la suite des dérivées.
3. La limite d'une suite de fonctions continue n'est pas toujours continue.
4. La convergence uniforme sur tout fermé borné de]0,1] n'implique pas la convergence uniforme sur [0,1].

CHAPITRE

2

Séries entières

En physique, on approche souvent une fonction par une fonction du premier degré ; quand cela ne donne rien on va jusqu'au second degré. Et si on continuait ?

2.1 Définitions-rayon de convergence

2.1.1 Définitions et généralités

Définition 2.1.1
On appelle série entière d'une variable complexe (resp. d'une variable réelle) une série de fonctions $\sum u_n$ *de terme général* $u_n(z) = a_n z^n$, $(z, a_n) \in \mathbb{C}^2$ *(resp.* $u_n(x) = a_n x^n, (x, a_n) \in \mathbb{R}^2$*). Les nombres complexes (resp. nombres réels)* a_n *sont appelés : coefficients de la série entière.*

Exemple 2.1.1.1
Un polynôme est un cas très particulier et sans intérêt de série entière. Par contre, une série géométrique est le premier cas de série entière rencontré (sans le dire) dans le cadre des séries géométriques.

Remarque 2.1.1 *Plus généralement une série entière est définie par : la série de fonctions* $\sum a_{\varphi(n)} z^{\varphi(n)}$, *où* φ *est une fonction croissante de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$.

Exemple 2.1.1.2
1)- $\sum z^n$, $a_n = 1$, *2)*- $\sum \frac{1}{n} z^n$, $a_n = \frac{1}{n}$, *3)*- $\sum \frac{1}{n!} z^n$, $a_n = \frac{1}{n!}$, *4)*- $\sum (-1)^n \frac{z^n}{n}$, $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$, *5)*- $\sum \frac{1}{n+1} z^{2n+1}$, $a_{2n} = 0$, $a_{2n+1} = \frac{1}{n+1}$.

2.1.2 Opérations sur les séries entières.

2.1.2.1 Somme de deux séries entières.

Définition 2.1.2
La somme de deux séries entières $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$*, est la série notée :*

$$\sum a_n z^n + \sum b_n z^n,$$

et définie par :

$$\sum a_n z^n + \sum b_n z^n = \sum (a_n + b_n) z^n.$$

2.1.2.2 Produit d'une série entière par un scalaire

Définition 2.1.3
Le produit d'une série entière $\sum a_n z^n$ *par un scalaire* $\lambda \in \mathbb{C}$ *est la série notée* $\sum a_n z^n$*, et définie par :*

$$\lambda(\sum a_n z^n) = \sum (\lambda a_n) z^n.$$

2.1.2.3 Produit de deux séries entières

Définition 2.1.4
Le produit de deux séries entières $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$*, est la série entière notée :*

$$(\sum a_n z^n).(\sum b_n z^n)$$

et définie par :

$$(\sum a_n z^n).(\sum b_n z^n) = \sum c_n\ z^n,$$

avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

2.1.3 Convergence et rayon de convergence.

Etude de quelques séries classiques pour déduire les définitions.

1. $\sum z^n$, $a_n = 1$. On a $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k = \dfrac{1 - z^n}{1 - z}$ converge vers $\dfrac{1}{1 - z}$ si, et seulement si, $|z| < 1$.

2. $\sum \frac{1}{n} z^n$, $a_n = \frac{1}{n}$. On a : $\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \frac{n}{n+1} |z| \to |z|$; donc converge pour $|z| < 1$ et diverge pour $|z| > 1$. L'ensemble $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ est appelé disque de convergence.
3. $\sum \frac{1}{n!} z^n$, $a_n = \frac{1}{n!}$. On a: $\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \frac{1}{n} |z| \to 0$ pour tout z ; donc converge pour tout z. Ici $D = \mathbb{C}$.
4. $\sum (-1)^n \frac{z^n}{n}$, $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$. On a : $\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \frac{n}{n+1} |z| \to |z|$; donc converge pour $|z| < 1$ et diverge pour $|z| > 1$.
   $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$.
5. $\sum n! z^n, a_n = n!$. On a : $\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = (n+1) |z| \to +\infty$ pour $z \neq 0$, donc converge pour $z = 0$ et diverge pour $z \neq 0$ $D = \{0\}$.

Définition 2.1.5
Soit une série entière d'une variable complexe ou réelle.
** On appelle rayon de convergence de $\sum a_n z^n$, le réel (bien défini) de $\overline{\mathbb{R}}$:*
R=inf$\{r \in \mathbb{R}^+ \sum |a_n| .r^n$ converge $\}$.

**L'ensemble $D(0, R) = \{z \in \mathbb{C}\, |z| < R\}$ ($]-R, R[$) est appelé disque ouvert (resp. intervalle ouvert) de convergence.*

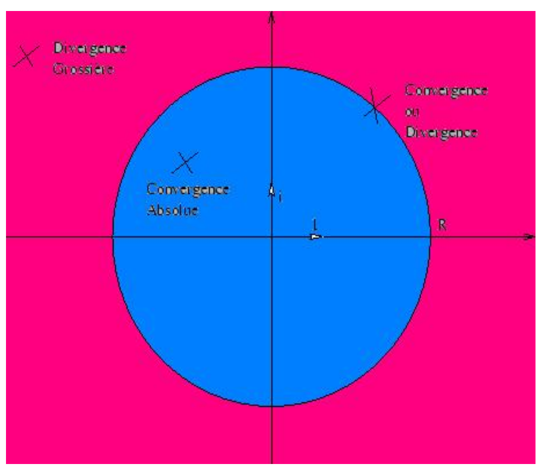


Fig. 2.1 – Domaine de convergence

2.1.3.1 Techniques de calcul du rayon de convergence.

Soit une série entière $\sum a_n z^n$.

Formule d'Hdamard.1.

Proposition 2.1.1
Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$, est le réel R défini par :

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \to +\infty} \left| a_n{}^{\frac{1}{n}} \right|.$$

Démonstration.- Ce résultat est obtenu à partir du critère de Cauchy.

Remarque 2.1.2

On peut utiliser aussi le critère de D'Alembert. Si la suite $(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|)_n$ *admet une limite l alors d'après le critère de D'Alembert on a :*

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |z| = l\,|z|$$

donc converge $l\,|z| < 1$ si et diverge si $l\,|z| > 1$ ou converge si $|z| < \frac{1}{l}$ et diverge si $|z| > \frac{1}{l}$. Le rayon de convergence est donc donné par :

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

On peut utiliser aussi le critère de Cauchy si la suite $\left(|a_n|^{\frac{1}{n}} \right)_n$ *admet une limite.*

Exemple. Soit la série entière $\sum \frac{1}{n} z^n$. On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim\limits_{n \to +\infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| = 1$, donc $R = 1$.

Remarque importante. Si ni la suite $\left((\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right)_n$ ni la suite $\left(|a_n|^{\frac{1}{n}} \right)_n$ n'admettent de limites ? Par exemple si on considère la série $\sum z^{n!}$, alors :

$$a_p = \begin{cases} 0 \text{ si p n'est pas un factorielle d'un entier} \\ 1 \text{ si } p = n! \end{cases}$$

La suite $\left(|a_n|^{\frac{1}{n}} \right)_n$ n'a pas de limite, et la plus grande valeur d'adhérence est :

$$\limsup_{n\to+\infty} |a_p|^{\frac{1}{p}} = \lim_{n\to+\infty} 1^{\frac{1}{n!}} = 1$$

et $R = \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} |a_p|^{\frac{1}{p}}} = 1.$

Formule d'Hdamard.2.

Proposition 2.1.2
Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$*, est le réel* R *défini par :*

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to+\infty} \left| a_n{}^{\frac{1}{n}} \right|.$$

2.1.3.2 Rayon de convergence de la somme et du produit.

Soient $A = \sum a_n z^n$ et $B = \sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence R_A et R_B respectivement.

Proposition 2.1.3
Si $A = \sum a_n z^n$ *et* $B = \sum b_n z^n$ *sont convergentes alors la série somme est convergente et son rayon de convergence* R_{A+B} *vérifie :*

$R_{A+B} \geq \min(A, B)$, *et* $R_{A+B} = \min(A, B)$ *si* $R_A \neq R_B$.

Proposition 2.1.4
Si $A = \sum a_n z^n$ *et* $B = \sum b_n z^n$ *sont absolument convergentes alors la série produit est convergente et son rayon de convergence* $R_{A.B}$ *vérifie :*

$R_{A.B} \geq \min(A, B)$.

Remarque 2.1.3

1. *Si on suppose seulement que les deux séries convergent, on n'est pas assuré que la série produit converge. Ainsi si on considère la série de terme général* $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$*, et qu'on forme son produit avec elle-même, on obtient pour terme général de la série produit :*
   $c_n = (-1)^n \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{k(n-k)}}$. *Et on montre par minoration que* $(c_n)_n$ *ne tend pas vers 0.*
2. *Soient les séries* $A = \sum z^n$ *et* $B = 1 - z = \sum b_n z^n, b_0 = 1, b_1 = -1,$ *et* $b_n = 0$, *pour* $n \geq 2$. *On a :* $R_A = 1$ *et* $R_B = +\infty$, *et* $R_{A.B} = +\infty > \min(A, B)$.
3. *Soient les séries* $A = \sum (-2^n + 1) z^n$ *et* $B = \sum 2^n z^n$. *On a :* $R_A = \frac{1}{2}$ *et* $R_B = \frac{1}{2}$. *Et on a :* $A + B = \sum z^n$ *et* $R_{A+B} = 1$.

4. *Soit la série* $A = \sum z^n$ *de somme* $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \dfrac{1}{1-z}$, *de rayon de convergence* $R_A = 1$. *La série produit définie par :*
   $A.B = (\sum z^n).(\sum z^n) = \dfrac{1}{(1-z)^2} = \sum (1+n)z^n$, *a pour rayon de convergence* $R_{A.A} = 1$.

2.2 Propriétés de la somme d'une série entière.

2.2.1 Continuité de la somme d'une série entière.

Théorème 2.2.1
Soit la série entière $\sum a_n z^n$. *S'il existe* $x_0 \in \mathbb{C}$ *tel que la suite* $(a_n x_0^x)_{n\geq 0}$ *soit bornée alors la série* $\sum a_n z^n$ *converge absolument sur tout domaine* $D(O, z_0) = \{z \in \mathbb{C}/|z| < |z_0|\}$.

Théorème 2.2.2
Soit la série entière $\sum a_n z^n$. *S'il existe* $x_0 \in \mathbb{C}$ *tel que la suite* $(a_n x_0^x)_{n\geq 0}$ *soit bornée alors la série* $\sum a_n z^n$ *converge normalement sur tout domaine* $D(O, kz_0) = \{z \in \mathbb{C}/|z| < k|z_0|\}$, *pour tout* $k \in]0,1[$.

Théorème 2.2.3
Si la série entière $\sum a_n z^n$ *est convergente et de rayon de convergence* R *alors la convergence est normale sur tout domaine fermé* $\bar{D}(0,\rho) = \{z \in \mathbb{C}/|z| \leq \rho\} \subset D(0,R)$.

Remarque 2.2.1

la continuité n'est pas uniforme sur $D(0,R)$, *mais uniforme sur tout disque fermé* $\bar{D}(0,\rho) \subset D(0,R)$.

Théorème 2.2.4
La somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *d'une série entière* $\sum a_n z^n$ *de rayon de convergence* R *est continue dans le disque ouvert de convergence* $D(0,R)$.

2.2.2 Intégration de la somme d'une série entière.

Théorème 2.2.5
La somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *d'une série entière d'une variable réelle* $\sum a_n x^n$ *de rayon de convergence* R *est integrable et on a :*
$\forall$ *x tel que* $|x| < R$ *:*

$$\int_0^x (\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (\int_0^x a_n t^n dt) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} x^n.$$

2.2.3 Dérivation de la somme. d'une série

Définition 2.2.1
Soit la série entière d'une variable réelle $\sum a_n x^n$ *de rayon de convergence* R*.Pour tout* $p \in \mathbb{N}^*$ *, la série dérivée d'ordre* p *est définie par :*

$$\sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!} a_n x^{n-p}.$$

Théorème 2.2.6 *La série dérivée d'ordre* p *a même rayon de convergence que la série initiale* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Théorème 2.2.7
La somme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *d'une série entière d'une variable réelle* $\sum a_n x^n$ *de rayon de convergence* R *est indéfiniment dérivable (dérivable à tout ordre) et on a :* $p \in \mathbb{N}^*$*, et on a :*
$\forall$ *x tel que* $|x| < R$ *,*

$$\frac{d^p f}{dx^p}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!p!} a_n x^{n-p}.$$

Corollaire 2.2.3.1
Si $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *est la somme d'une série entière d'une variable réelle* $\sum a_n x^n$ *de rayon de convergence* R*.Alors :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{f^{(n)}(x)}{n!}.$$

2.3 Développement en série entière

2.3.1 Définitions et généralités

Définition 2.3.1
Soit f *une fonction définie au voisinage d'un point* $z_0 \in \mathbb{C}$ *et à valeurs complexes. On dit que* f *est developable en série entière en* z_0 *s'il existe une suite* $(a_n)_n$ *et un voisinage* U *de* z_0 *tels que la série* $\sum a_n(z-z_0)^n$ *soit convergente sur* U *et :*
$\forall\ z \in U\ ,\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n.$

Si f *est une fonction numérique à valeurs réelles on a :* $f^{(p)} = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!p!} a_n x^{n-p}$, *et*

$a_p = \frac{1}{p!}\ f^{(p)}(x_0).$

Définition 2.3.2 ***(fonction analytique)***
On dit que f *est analytique complexe au point* z_0 *(resp. sur un domaine* D*) si elle est developable en série entière en* z_0 *(resp. en chaque point du domaine* D*).*

Définition 2.3.3 ***(fonction holomorphe).***
Soit f *une fonction définie sur un domaine* D *du plan* $\mathbb{C}$ *et à valeurs complexes.On dit que* f *est holomorphe au point* $z_0 \in D$ *(resp. holomorphe dans* D*), si :* $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$, *existe, qu'on note* $f'(z_0)$, *et on dit que* f *est* $\mathbb{C}$*- dérivable en* z_0 *(resp. holomorphe en chaque point de* D*).*

Remarque 2.3.1
Si on pose $z = x+iy$ *et* $f(z) = f(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y,$ *alors :*
f *est holomorphe si est seulement* $\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, *ce qui est équivalant à :*

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Remarque 2.3.2
On définit de manière analogue la notion de fonction analytique réelle pour les fonctions réelles définies sur un intervalle I *de* $\mathbb{R}$*. Mais il y a une différence. En effet : Une fonction analytique complexe est* $\mathbb{C}$*-dérivable donc holomorphe et réciproquement. Une fonction analytique réelle est indéfiniment dérivable, mais une fonction réelle n'est pas nécessairement analytique bien qu' elle soit de classe* C^∞.

Exemple 2.3.1.1
$f(x) = exp(-\frac{1}{x^2})$, *si* $x \neq 0$ *et* $f(0) = 0$. $f^{(n)}(0) = 0$, *mais* $f \neq 0$.

2.3.2 Développements obtenus par la formule de MacLaurin.

markbothM.HarfaouiChapitre-3- Développements obtenus par la formule de MacLaurin.

Définition 2.3.4 *Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur un voisinage V de 0. La formule de Mac Laurin d'ordre n s'écrit :*
$f(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{x^p}{p!}\ f^{(p)}(0).x^p + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\ f^{(n+1)}(\theta x)$, *avec* $0 < \theta < 1$.

Théorème 2.3.1
Pour que la série $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ *converge et ait pour somme $f(x)$, il faut et il suffit que* $\lim_{n\to+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\ f^{(n+1)}(\theta x) = 0$ *pour tout $x \in V$.*

Théorème 2.3.2 *Soit f une fonction numérique d'une variable réelle indéfiniment dérivable sur $]-r, r[$ .S'il existe une constante $M > 0$, tels que :*
$\forall\ x \in\ ]-r, r[,\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ \left|f^{(n)}(x)\right| \leq M$, *alors f est developable en série entière en 0 sur $]-r, r[$, et on a :*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} .x^n.$$

Démonstration

Pour $x \in\ ]-r, r[$ on a :

$$\left| f(x) - \sum_{p=0}^{n} \frac{x^p}{p!} f^{(p)}(0).x^p \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) \right| \leq \frac{Mr^{n+1}}{(n+1)!} = \alpha_n, \text{ et}$$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = r \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, donc la série $\sum \alpha_n$ converge et $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$.

2.3.3 Fonction exponentielle complexe.

Définition 2.3.5
On appelle fonction exponentielle complexe la somme de la série $\sum \frac{1}{n!} z^n$ *définie sur $\mathbb{C}$ par :*

$$f(z) = e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n.$$

Proposition 2.3.1

1. *La fonction* $z \to e^z$ *est continue sur* $\mathbb{C}$.
2. $\forall (z,z') \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$:

$e^{z+z'} = e^z e^{z'}$
$e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$ $(e^z)^n = e^{nz}$

2.3.4 Développement en série entière des fonctions usuelles.

1.

$\forall z \in \mathbb{C}$	$e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n,$

par définition de la fonction exponentielle.
Par application de la fonction exponentielle on trouve facilement les développement suivants :

2.

$\forall x \in \mathbb{R}$	$cosx = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}.x^{2n}$
$\forall x \in \mathbb{R}$	$sinx = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}.x^{2n+1}$
$\forall x \in \mathbb{R}$	$\cosh x = \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!}.x^{2n}$
$\forall x \in \mathbb{R}$	$sinhx = \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!}.x^{2n+1}.$
$\forall \lvert z \rvert < 1$	$\dfrac{1}{1-z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$,c'est la somme de la série géométrique de raison z.

Par intégration de la série géométrique termes à termes et sa somme on obtient :

3.

$\lvert x \rvert < 1$	$\ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n}.x^n.$
$\lvert x \rvert < 1$	$\dfrac{1}{1+x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n.x^{2n}.$
$\lvert x \rvert < 1$	$Arc\tan(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.x^{2n+1}.$

2.3.5 Développements obtenus par équation différentielle.

Développement en série entière de la fonction : $f_\alpha(x) = (1+x)^\alpha$.

* Si $\alpha \in \mathbb{N}$, $f_\alpha(x)$ est un polynôme de degré n et tous les coefficients sont nuls à partir du rang n+1.

*Si $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{N}$ on a :

$$f_\alpha^{'}(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} = \frac{\alpha}{1+x} f_\alpha(x),$$

ou

$$(1+x)f_\alpha^{'}(x) - \alpha f_\alpha(x) = 0.$$

On suppose : $f_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, alors $f_\alpha^{'}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ donc

$$(1+x)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty}((n+1)a_{n+1} + (n-\alpha)a_n)x^n = 0.$$

On obtient la relation de récurrence pour tout $n \geq 0$:

$$a_{n+1} = \frac{\alpha - n}{n+1} a_n,$$

Donc :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{(\alpha-n)(\alpha-n+1)(\alpha-n+2)....\alpha(\alpha-1)}{(n+1)n(n-1)....3.2.1} a_0 \\ &= \frac{(\alpha-n)(\alpha-n+1)(\alpha-n+2)....\alpha(\alpha-1)}{(n+1)!} a_0 \end{aligned}$$

avec $a_0 = f_\alpha(0) = 1$.
On obtient donc

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\alpha-n+1)(\alpha-n+2)....\alpha(\alpha-1)}{(n)!} x^n,$$

et $R = 1$.

Cas particuliers.

Pour tout x tel que $|x| < 1$ on déduit pour quelques valeurs de α

$\alpha = -1$, on obtient	$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n.$
$\alpha = -\frac{1}{2}$, on obtient Par intégration on obtient	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}x^{2n}.$ $Arc\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$

CHAPITRE

3

Séries de Fourier

Mathématiciens du chapitres

Fig. 3.1 – Joseph Fourier

Fig. 3.2 – Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet

Jean Baptiste Joseph Fourier, né le 21 mars 1768 à Auxerre et mort le 16 mai 1830 à Paris, est un mathématicien et physicien français, connu pour ses travaux sur la décomposition de fonctions périodiques en séries trigonométriques convergentes appelées séries de Fourier et leur application au problème de la propagation de la chaleur.

Il fait ses études chez les Bénédictins à l'École militaire d'Auxerre. Destiné à l'état monastique, il préfère s'adonner aux sciences. Il intègre l'École normale supérieure, où il a entre autres comme professeurs Joseph-Louis Lagrange, Gaspard Monge et Pierre-Simon La-

place, auquel il succède à la chaire à Polytechnique en 1797.

Il participe à la Révolution, manquant de peu de se faire guillotiner durant la Terreur, sauvé de justesse par la chute de Robespierre. En 1798, il prend part à la campagne d'Égypte. Il occupe un haut poste de diplomate et devient secrétaire de l'Institut d'Égypte. À son retour en France en 1802, Napoléon le nomme préfet de l'Isère le 12 février : il est destitué lors de la Restauration.

En 1817, il est élu membre de l'Académie des sciences, dont il devient secrétaire perpétuel pour la section des sciences mathématiques à la mort de Jean-Baptiste Joseph Delambre en 1822. En 1826, il est élu membre de l'Académie française. Tombe du Père-Lachaise.

Fourier est connu pour sa Théorie analytique de la chaleur, paru en 1822[1]. On lui doit aussi plusieurs mémoires ainsi que des Rapports sur les progrès des sciences mathématiques, parus en 1822-1829, et des Éloges de Jean-Baptiste Joseph Delambre, William Herschel et Abraham Breguet. Il est élu membre étranger à la Royal Society le 11 décembre 1823. Fourier est enterré au cimetière du Père-Lachaise à Paris, à côté de Champollion.

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (13 février 1805, Düren - 5 mai 1859, Göttingen) est un mathématicien allemand.

Il a été élevé en Allemagne, puis a été ensuite envoyé en France pour suivre ses études supérieures. Il fut en contact avec les plus grands mathématiciens français de l'époque, dont Legendre, Laplace ou Fourier. Il retourne ensuite en 1825 en Allemagne où il travaille avec Gauss, dont il reprendra la chaire à l'Université de Göttingen, et Jacobi. Il eut entre autres comme élève Riemann.

Les travaux de Dirichlet ont surtout porté sur les séries de Fourier et l'arithmétique, où on lui doit l'essentiel de la démonstration du dernier théorème de Fermat à l'aide des entiers de Dirichlet pour le cas où le paramètre est égal à cinq. On lui doit également des travaux sur les intégrales et la recherche de fonctions discontinues. Un célèbre problème d'analyse porte son nom : le Problème de Dirichlet. Dirichlet a également travaillé sur le théorème de Fermat-Wiles, en le démontrant pour le cas où n est égal à 14, et en contribuant à la démonstration de Legendre pour le cas où n est égal à 5. On lui doit le noyau de Dirichlet qui sert à étudier la convergence des séries de Fourier.

Il s'est également rendu célèbre pour avoir donné une démonstration du théorème de la progression arithmétique, au moyen des caractères de Dirichlet et des fonctions L de Dirichlet. Il fut l'un des pionniers de l'utilisation des outils de l'analyse complexe pour attaquer des problèmes arithmétiques, ouvrant la voie à la théorie analytique des nombres.

On lui doit aussi le principe des tiroirs, qui s'énonce ainsi : si on range n+1 chaussettes dans n tiroirs, il y a un tiroir où il y a au moins deux chaussettes ! Malgré sa simplicité, ce résultat permet de prouver des résultats non triviaux. Il est fait membre étranger de la Royal Society en 1855.

3.1 Préambule historique

En 1746, D'Alembert étudie l'équation des cordes vibrantes :

$$\frac{1}{c^2}.\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

dont il donne les solutions sous la forme $F(ct+x)+G(ct-x)$ où F et G sont arbitraires. (c est la vitesse de propagation de l'onde). Vers 1750, Daniel Bernoulli pensait que toute solution peut s'obtenir comme superposition d'une série d'harmoniques, par exemple

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.\sin\frac{nx}{l}.\cos\frac{nct}{l}$$

dans le cas où les deux extrémités de la corde sont fixées. Or dans le cas où la position initiale est donnée par une condition $y(x,0) = \varphi(x)$, ceci implique que $\varphi(x)$ puisse se développer en série trigonométrique $\sum_{n=1}^{\infty} b_n.\sin\frac{nx}{l}$. A l'époque, ceci paraissait impossible, l'argument principal étant par exemple qu'une fonction non périodique ne pouvait se représenter par une série de fonctions périodiques. Qu'on songe par exemple à une formule telle que :

$$\frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}\cos(nx) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4p}{n}\sin(nx)$$

pour représenter la fonction x^2, alors que celle-ci n'est pas périodique. L'égalité de la série et de la fonction est néanmoins valable sur $]0,2p[$.

Le problème fut relancé en 1821 lorsque Fourier développa sa théorie analytique de la chaleur. L'équation de la chaleur s'écrit

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

, où $T(x,t)$ est la température à l'instant t au point d'abscisse x et D le coefficient de diffusivité thermique. Si l'on maintient une température nulle aux extrémités, une solution formelle est donnée par :

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.\sin\frac{nx}{l}\exp(-\frac{Dn^2t}{l^2})$$

avec là aussi l'obligation d'avoir $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.\sin\frac{nx}{l}$ si la température initiale est donnée par $T(x,0) = \varphi(x)$. Fourier donne un certain nombre d'exemples et établit un lien de réciprocité entre les formules suivantes :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(x)\cos nx dx,\quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(x)\sin nx dx$$

et

$$\varphi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n.cosnx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.\sin nx$$

Dès lors, les séries trigonométriques vont se trouver au coeur du développement de l'analyse au XIXème. La série dont les coefficients sont ainsi définis s'appelle série de Fourier associée à φ. Les questions qui se développeront alors portent sur les points suivants :

- La fonction φ peut-elle être arbitraire ? Ce qui nécessite une réflexion sur la notion de fonction et de continuité.
- Pour quelles fonctions φ les expressions a_n et b_n sont-elles calculables ? Question liée au développement de la théorie de l'intégration.
- Les séries convergent-elles, et si oui, est-ce vers φ ? Ce qui nécessite une théorie de la convergence.
- φ étant donnée, y a-t-il unicité de la série trigonométrique qui converge vers φ (si tant est qu'il en existe une) ? Continuité, intégration, convergence.

A l'époque de Fourier, aucune de ces notions n'est clairement précisée. Il faudra plus d'un siècle pour éclaircir la plupart des questions relatives aux séries trigonométriques, avec la notion de fonction développée par Dirichlet (1829), et celle d'intégrale par Riemann (1854) puis par Lebesgue (1902). Signalons enfin que c'est en réfléchissant sur un problème d'unicité des séries trigonométriques que Cantor développa sa théorie des ensembles . Les formules de Fourier entrent dans un cadre beaucoup plus général, celui de l'analyse ou de la décomposition d'un objet, puis celui de la synthèse ou de la reconstruction de l'objet à partir de ses éléments décomposés.

3.2 Quelques formules trigonométriques

Pour tout $x \neq 0$ modulo 2π on a

$$1 + e^{ix} + e^{2ix} + ... + e^{inx} = \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} = e^{inx/2}\frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}.$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$
$$\cos(a).\cos(b) = \frac{1}{2}\Big(\cos(a-b) + \cos(a+b)\Big)$$
$$\sin a. \sin b = \frac{1}{2}\Big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\Big)$$

Le moyen le plus rapide pour retrouver ces formules est d'utiliser les formules d'Euler en analyse complexe.

3.3 Fonctions continues ou $\mathcal{C}^k$ parmrceaux

Rappelons la notion de discontinuité de première espèce.

Définition 3.3.1
On dit qu'ne fonction f, non définie en un point a, admet une discontinuité de première espèce en un point a si les limites à droite et à gauche de a existent et sont finies. (Celles-ci ne sont pas forcément égales sauf en cas de continuité). Elles sont respecivement notée $f(a^+)$ et $f(a^-)$.

Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et une subdivision $c_1 = a < c_2, ..., < c_n = b$ de $[a,b]$.

Définition 3.3.2
Une foction f est continue par morceax sur l'intervalle $[a,b]$ si f est continue sur chaque $]c_j, c_{j+1}[$ et admet une discontinuité de première espèce en chaque point c_j ,notées $f(c_j^+)$ et $f(c_j^-)$.

Définition 3.3.3
Une foction f est $\mathcal{C}^1$ par morceax sur un intervalle $[a,b]$ si f est dérivable sur chaque $]c_j, c_{j+1}[$ et que la dérivée f' admet une limite à droite finien $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(c_j+h)-f(c_j^+)}{h}$ et à gauche finie $\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(c_j+h)-f(c_j^-)}{h}$ à chaque c_j, notées $f(c_j^+)$ et $f(c_j^-)$.

Définition 3.3.4
Une foction f est $\mathcal{C}^k$ par morceax sur un intervalle $[a,b]$ si f est k foids dérivable sur chaque $]c_j, c_{j+1}[$ et que chaque fonction f, f',..., $f^{(k)}$ admet une limite à droite et à gauche à chaque c_j.

Exemple 3.3.0.1
La fonction f 2π-periodique défine sur $]-\pi,\pi]$ par $f(x)=x$ n'est pas continue mais continue par morçeaux. On a
$\lim\limits_{x\to\pi^-} f(x) = \pi = f(\pi)$ *et* $\lim\limits_{x\to-\pi^+} f'x) = -\pi \neq f(\pi)$. *La fonction n'est pas continue $x=\pi$.*

Remrque
Pour vérifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ on vérifie que :

1. f est continue sur l'ouvert $]-\pi,\pi[$
2. f est continuement dérivale sur l'ouvert $]-\pi,\pi[$
3. $\lim\limits_{x\to\pi^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-\pi^+} f(x) = f(\pi)$
4. $\lim\limits_{x\to\pi^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to-\pi^+} f(x)$

3.4 Séries trigonométriques

3.4.1 Définitions

Définition 3.4.1
On dit que deux fonctions f et g continues sur $[a,b]$ sont **orthogonaux** *sur $[a,b]$ si*

$$\int_a^b f(x).g(x)dx = 0.$$

Exemple 3.4.1.1
Les fonctions f et g définies sur $[-1,1]$ par :

$$f(x) = x \quad et \quad g(x) = x^2$$

sont orthogonaux.

Définition 3.4.2
Un système fini ou infini de fonctions continues φ_1, φ_2,...,φ_n,...($n \in \mathbb{N}$) sur $[a,b]$, est dit **orthogonal** *sur $[a,b]$ si, pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$*

$$\int_a^b \varphi_i(x).\varphi_j(x)dx = \delta_{ij}.$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker défini par

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & si \quad i \neq j \\ 1, & si \quad i = j \end{cases}$$

Théorème 3.4.1
Le système trigonométrique réelle défini par :

$$\{1, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), ..., \cos(nx), \sin(nx)...\}$$

orthogonal *sur $[-\pi, \pi]$.*

La démonstration est une conséquence des formules trigonométrique.

Définition 3.4.3
On appelle série trigonométrique réelle, toute série de fonctions de terme général

$$\begin{cases} u_n(x) = a_n.\cos(n\omega x) + b_n.\sin(n\omega x), & si\,; \quad n \geq 1 \\ u_0(x) = \dfrac{a_0}{2} \end{cases} \tag{1}$$

avec $x \in \mathbb{R}$, $\omega > 0$, $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque 3.4.1 *Supposons que la série converge et posons*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.\cos(n\omega x) + b_n.\sin(n\omega x).$$

Sachant que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$:

$$\cos(n\omega(x + \frac{2k\pi}{\omega})) = \cos(n\omega x + 2kn\pi)) = \cos(n\omega x)$$

$$\sin(n\omega(x + \frac{2k\pi}{\omega})) = \sin(n\omega x + 2kn\pi)) = \sin(n\omega x).$$

Alors la série (1)converge en tout point de la forme $x + \dfrac{2k\pi}{\omega}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Si la série (1) converge dans $\mathbb{R}$, on aura $f(x) = f(x + \dfrac{2k\pi}{\omega})$ et par suite la fonction f est périodique de période $T = \dfrac{2k\pi}{\omega}$.

En conclusion, les propriétés suivantes sont équivalentes :

P_1 : *La série trigonométrique (1) converge dans* $\mathbb{R}$

P_2 : *La série trigonométrique (1) converge dans* $[0, \frac{2\pi}{\omega}]$.

P_3 : *La série trigonométrique (1) converge dans* $[\alpha, \alpha + \frac{2\pi}{\omega}]$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Proposition 3.4.1 *Si les séries numériques* $\sum a_n$ *et* $\sum b_n$ *sont absolument convergentes alors la série trigonométrique (3) est normalement convergente sur* $\mathbb{R}$ *; donc absolument et uniformément sur* $\mathbb{R}$.

Preuve
C'est evident puisque $| a_n.\cos(n\omega x) + b_n.\sin(n\omega x) | \leq | a_n | + | b_n |$.

Proposition 3.4.2 *Si les suites numériques* (a_n) *et* (b_n) *sont décroissantes et tendent vers 0, alors la série trigonométrique (1) est convergente pour* $x \neq \frac{2\pi}{\omega}$ *où* $k \in \mathbb{Z}$.

Preuve
C'est une application direct du théorème d'Abel. Pour cela il suffit tout simplement de montrer que les sommes suivantes sont majorées indépendamment de n.

$$R_n = \sum_{p=0}^{p=n} \cos(p\omega x) \quad \text{et} \quad etI_n = \sum_{p=0}^{p=n} \sin(p\omega x).$$

On utilise pour cela la somme complexe :

$$S_n = R_n + iI_n$$

et on aura

$$| R_n | \leq \frac{2}{\sin(\frac{\omega x}{2})} \text{ et } | I_n | \leq \frac{2}{\sin(\frac{\omega x}{2})}$$

3.4.2 Calcul des coefficients de la série trigonométrique. Cas réel

Mettons nous dans les conditions de convergence uniforme de la série trigonométrique (1) et posons

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k.\cos(k\omega x) + b_k.\sin(k\omega x).$$

Alors

$$f(x)\cos(n\omega x) = \frac{a_0}{2}\cos(n\omega x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \Big[a_k.\cos(k\omega x)\cos(n\omega x) + b_k.\sin(k\omega x)\cos(n\omega x)\Big].$$

et

$$f(x)\sin(n\omega x) = \frac{a_0}{2}\sin(n\omega x) + \sum_{k=1}^{+\infty}\Big[a_k.\cos(k\omega x)\sin(n\omega x) + b_k.\sin(k\omega x)\sin(n\omega x)\Big].$$

La convergence uniforme permet d'avoir :

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x)\cos(n\omega x)dx =$$

$$\frac{a_0}{2}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\cos(n\omega x)dx + \sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} a_k.\cos(k\omega x)\cos(n\omega x)dx + \sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} b_k.\sin(k\omega x)\cos(n\omega x)dx.$$

et

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x)\sin(n\omega x)dx =$$

$$\frac{a_0}{2}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\sin(n\omega x)dx + \sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} a_k.\cos(k\omega x)\sin(n\omega x)dx + \sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} b_k.\sin(k\omega x)$$
$$sin(n\omega x)dx.$$

On montre facilement que :

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\cos(n\omega x)\cos(nk\omega x)dx = \begin{cases} 0, & \text{si };k \neq n \\ \frac{\pi}{\omega}, & \text{si };k = n \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\sin(n\omega x)\sin(k\omega x)dx = \begin{cases} 0, & \text{si };k \neq n \\ \frac{\pi}{\omega}, & \text{si };k = n \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\sin(k\omega x)\cos(n\omega x)dx = 0$$

On déduit alors les coefficients par les expressions suivantes :

$$a_n = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x)\cos(n\omega x)dx$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x)\sin(n\omega x)dx$$

Ces expressions sont valables même pour $n = 0$.

Lemme 3.4.1
Soit f une fonction périodique de période $T > 0$ et integrable dans l'intervalle $[0, T]$. Alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_0^T f(t)dt = \int_\alpha^{\alpha+T} f(t)dt.$$

Remarque 3.4.2

Moyennant ce lemme, les coefficients de la série trigonométrique peuvent s'écrire, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$a_n = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x)\cos(n\omega x)dx = \frac{\omega}{\pi}\int_\alpha^{\alpha+\dfrac{2\pi}{\omega}} f(x)\cos(n\omega x)dx$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\dfrac{2\pi}{\omega}} f(x)\sin(n\omega x)dx = \int_\alpha^{\alpha+\frac{2\pi}{\omega}} f(x)\sin(n\omega x)dx$$

En particulier si f est 2π-périodique (cas où $\omega = 1$)

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

3.5 Séries de Fourier

Les séries de Fourier sont un outil fondamental dans l'étude des fonctions périodiques. C'est à partir de ce concept que s'est développée la branche des mathématiques connue sous le nom d'analyse harmonique.

3.5.1 Coefficients de de Fourier

On cherche à développer f sous la forme :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big[a_n.\cos(nx) + b_n.\sin(nx)\Big] = \frac{a_0}{2} + \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\Big[a_n.\cos(nx) + b_n.\sin(nx)\Big].$$

La raison pour laquelle le terme constant est $\dfrac{a_0}{2}$ et non simplement a_0 est la suivante.
Si on utilise les exponentielles complexes, on a :

$$\cos(nx) = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(nx) = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

La somme partielle $S_N(x)$ vaut :

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\Big[a_n.\cos(nx) + b_n.\sin(nx)\Big] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left[\frac{a_n - ib_n}{2}e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2}e^{-inx}\right] \\ &= \sum_{n=-N}^{n=N} c_n e^{inx} \end{aligned}$$

avec $c_0 = \dfrac{a_0}{2}+$, et pour $n > 0$ $c_n = \dfrac{a_n - ib_n}{2}$ et $c_{-n} = \dfrac{a_n + ib_n}{2}$.

Le facteur $\dfrac{1}{2}$ apparaît dans chaque expression.

Définition 3.5.1
On appelle coefficients de Fourier de f continue par morceaux 2π-périodique, les nombres suivants :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx,\ \ si\, n \geq 0$$

[1] *et*

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx,\ \ si\, n > 0$$

ou

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{(-inx)}dx,\ \ si\, n \in \mathbb{Z}$$

Remarque 3.5.1

On utilise a_n et b_n pour des fonctions à valeurs réelles $\mathbb{R}$ et $_n$ pour des fonctions à valeurs complexes $\mathbb{C}$.

Cas particuliers :fonctions paires et fonctions impaires

Si f est developable en série de Fourier alors :

1. $\begin{cases} a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \\ b_n = 0 \end{cases}$ si f est paire.

2. $\begin{cases} a_n = 0 \\ b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx \end{cases}$ si f est impaire.

[1] **Joseph Fourier** (1768-1830) Physicien et mathématicien français. Il a développé le calcul de séries trigonométriques pour étudier les problèmes de transfert de chaleur.

Définition 3.5.2
On appelle série de Fourier associée à la fonction f, continue par morceaux 2π-périodique , la série de terme général :

$$\begin{cases} u_n(x) = a_n.\cos(n.x) + b_n.\sin(n.x), & si\,;\ n \geq 1 \\ u_0(x) = \dfrac{a_0}{2} \end{cases} \qquad (2)$$

et on note somme

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big[a_n.\cos(nx) + b_n.\sin(nx)\Big].$$

avec

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$$

et

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

a_n et b_n sont appelés coefficient de de Fourier de la fonction f.

Définition 3.5.3 *(Cas général)*
On appelle série de Fourier associée à la fonction f, continue par morceaux T-périodique , la série de terme général :

$$\begin{cases} u_n(x) = a_n.\cos(2\pi\dfrac{n}{T}.x) + b_n.\sin(2\pi\dfrac{n}{T}.x), & si\,;\ n \geq 1 \\ u_0(x) = \dfrac{a_0}{2} \end{cases} \qquad (3)$$

et on note somme

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big[a_n.\cos(2\pi\frac{n}{T}.x) + b_n.\sin(2\pi\frac{n}{T}.x)\Big].$$

avec

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^{T} f(x)\cos(2\pi\frac{n}{T}.x)dx = \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin(2\pi\frac{n}{T}.x)dx$$

et

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^{T} f(x)\sin(2\pi\frac{n}{T}.x)dx = \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin(2\pi\frac{n}{T}.x)dx$$

a_n et b_n sont appelés coefficient de de Fourier de la fonction f.

Proposition 3.5.1
Si on note $c_n(f)$ le coefficient de Fourier de f alors

1. $c_n(\alpha.f) = \alpha.c_n(f)$ *et* $c_n(f+g) = c_n(f) + c_n(g)$.
2. *Si f et g sont continues, $f = g$ si et seulement si, $c_n(f) = c_n(g)$ pour tout n.*

3.5.2 Etudes de quelques exemples.

1. Les coefficients de Fourier de la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si}, 0 < x < \pi, \\ -1 & \text{si}, -\pi < x < 0. \end{cases}$$

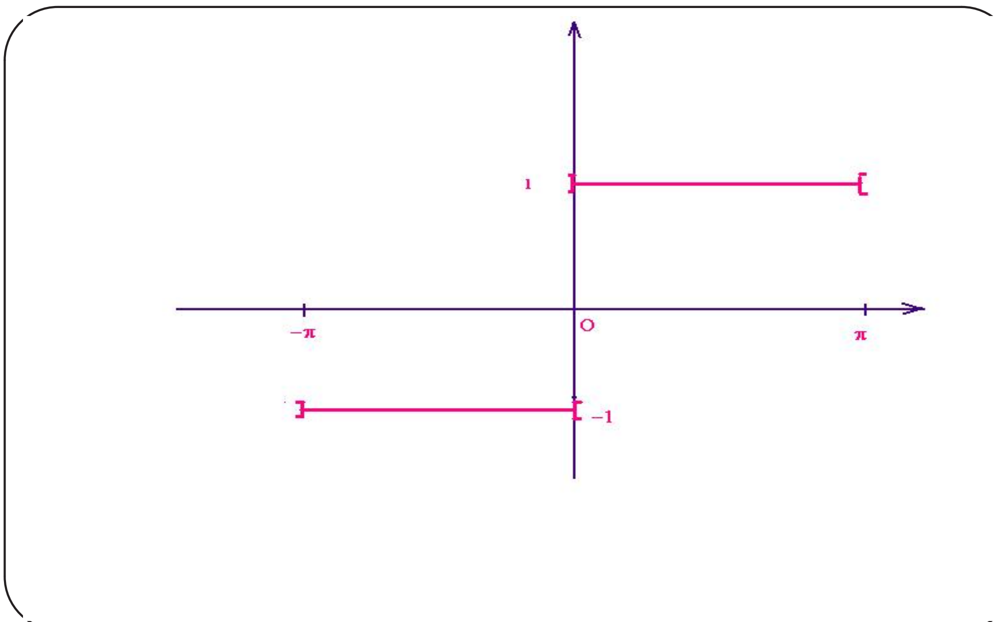


FIG. 3.3 – Courbe de la fonction f

sont $a_n = 0$ car f est impaire pour tout n, et

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \int_0^{\pi}\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\begin{cases} 0 & \text{si n est pair} \\ \dfrac{4}{n\pi} & \text{si n est impair.} \end{cases}$$

et la série de Fourier associée à f est :

$$S_f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$$

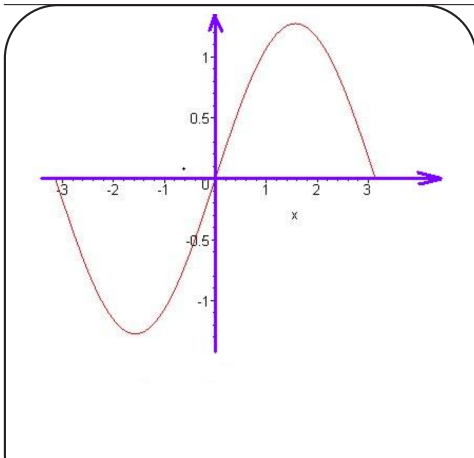


FIG. 3.4 – Courbe de la Sf pour N=1

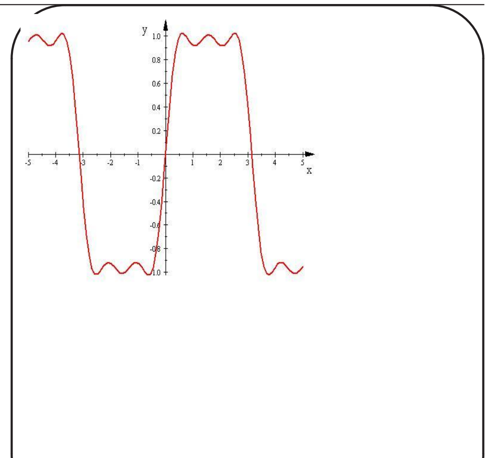


FIG. 3.5 – Courbe de la Sf pour N=2

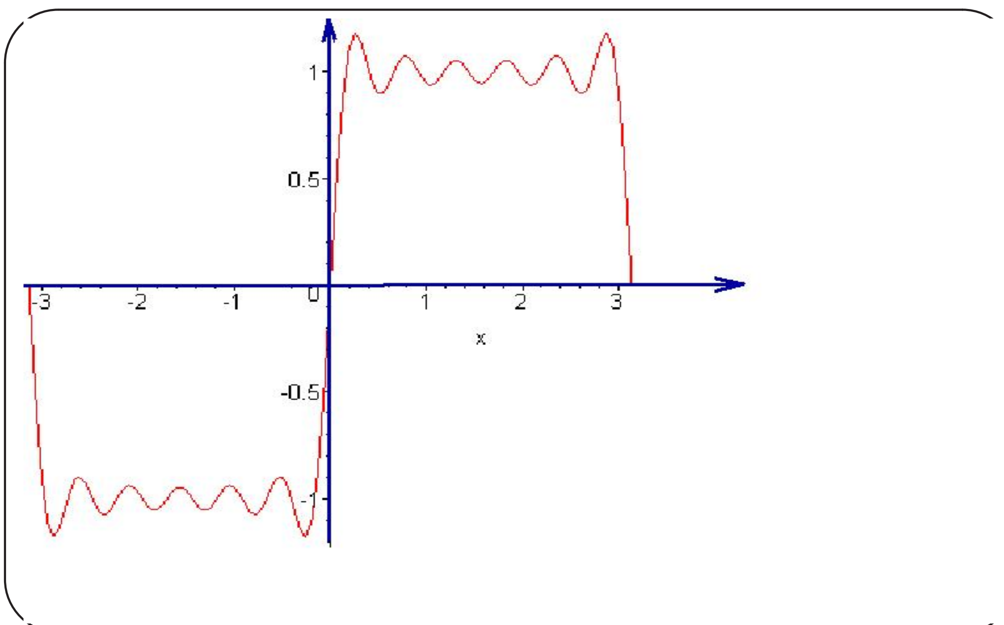


FIG. 3.6 – Courbe de la Sf pour N=11

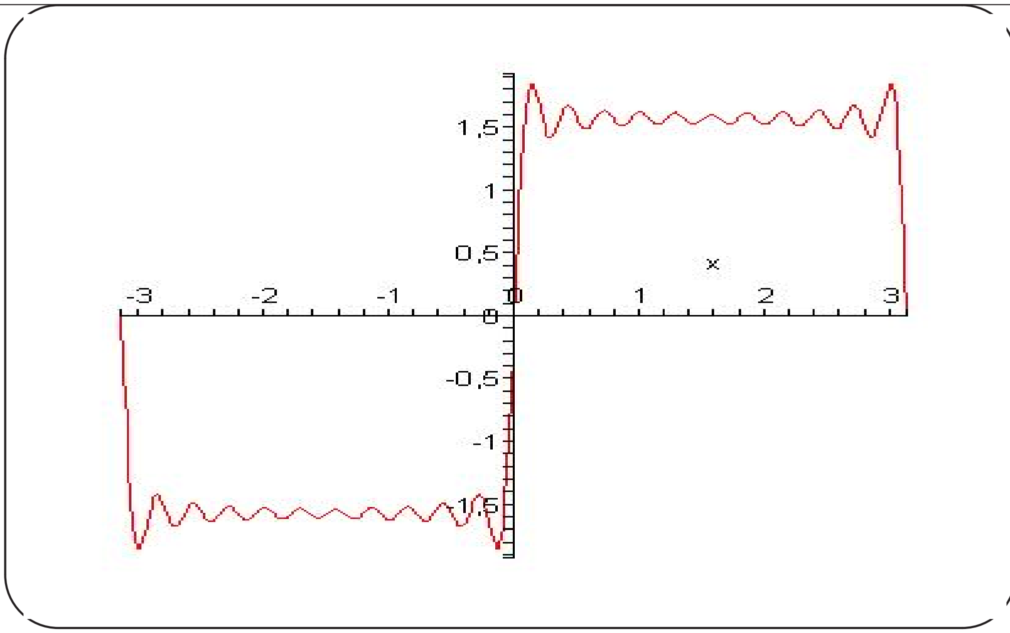


FIG. 3.7 – Courbe de la Sf pour N=21

2. Calcul des coefficients de Fourier de la fonction f définie sur $[-\pi, \pi]$ par :

$$f(x) = \mid x \mid$$

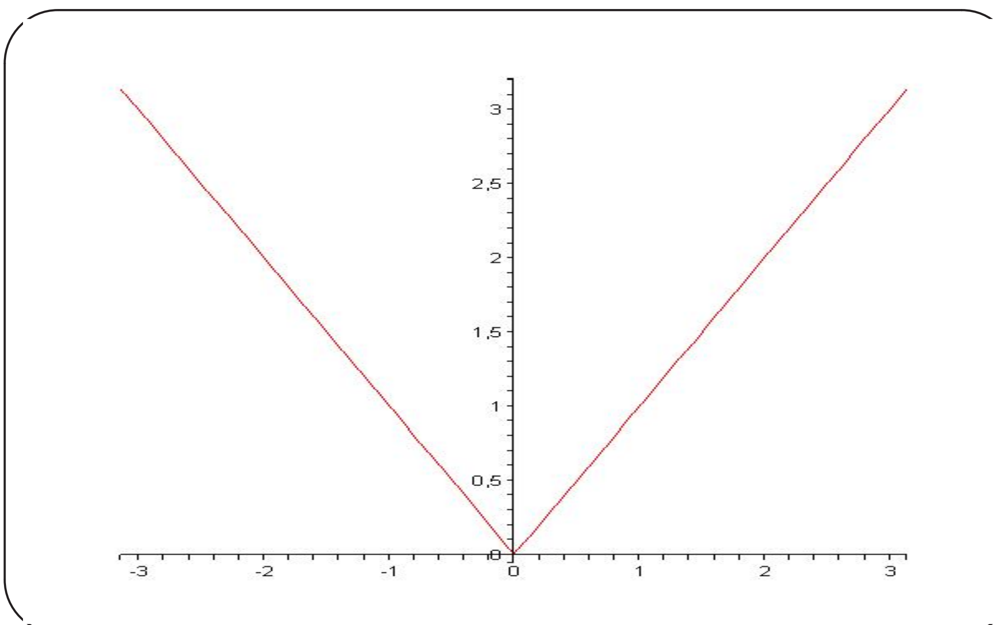


FIG. 3.8 – Courbe de la fonction $f(x) = \mid x \mid$

On a $b_n = 0$ car f est paire pour tout n. De plus $a_0 = \pi$ et

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \\
&= \frac{2}{\pi}\Big([x\frac{1}{n}\sin(nx)]_0^{\pi} - \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)dx\Big) \\
&= \frac{2}{n^2\pi}\Big[(-1)^n - 1\Big] \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si n est pair} \\ -\dfrac{4}{n^2\pi} & \text{si n est impair.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

et la série de Fourier associée à f est :

$$S_f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}.$$

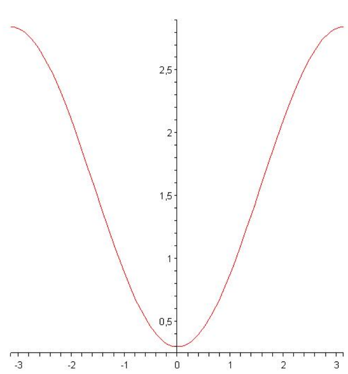


FIG. 3.9 – Courbe de la Sf de $f(x) =\mid x \mid$ pour N=3

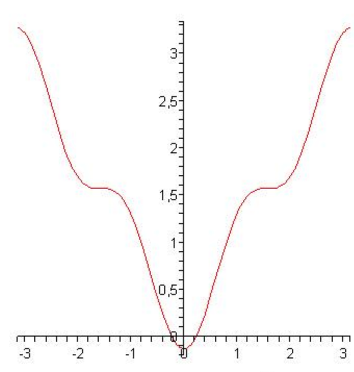


FIG. 3.10 – Courbe de la Sf de $f(x) =\mid x \mid$ pour N=2

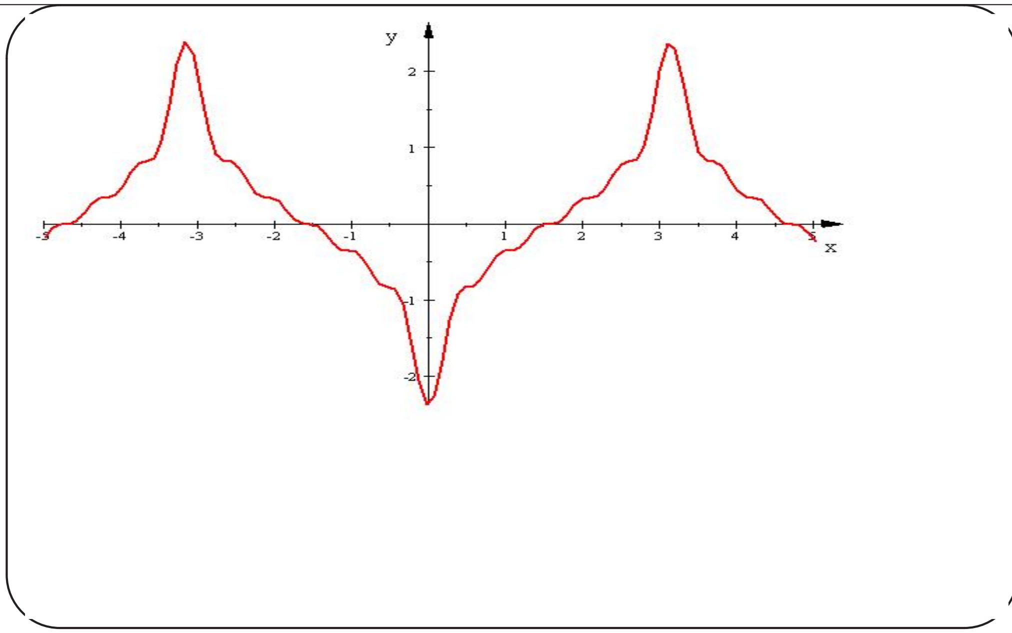


FIG. 3.11 – Courbe de la Sf de $f(x) =| x |$ pour N=5

3. Calcul des coefficients de Fourier de la fonction f définie sur $[-\pi, \pi]$ par : $f(x) = x^2$.

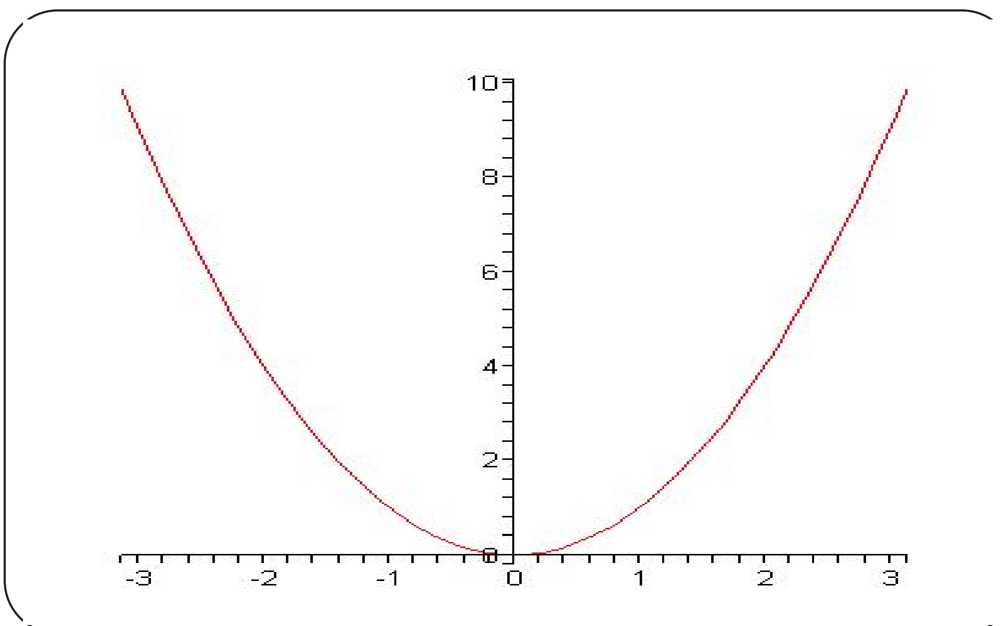


FIG. 3.12 – Courbe de la fonction $f(x) = x^2$

On a $b_n = 0$ car f est paire pour tout n, $a_0 = \dfrac{2}{3}\pi^2$ et $a_n = (-1)^n \dfrac{4}{n^2}$ et la série de Fourier

associée à f est :

$$S_f(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$$

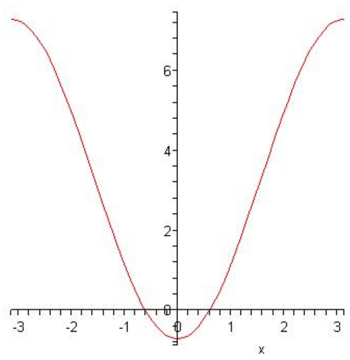


FIG. 3.13 – Courbe de la Sf de $f(x) = x^2$ pour N=1

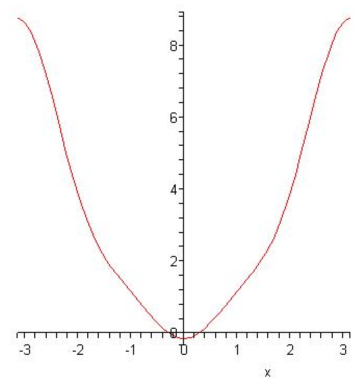


FIG. 3.14 – Courbe de la Sf de $f(x) = x^2$ pour N=3

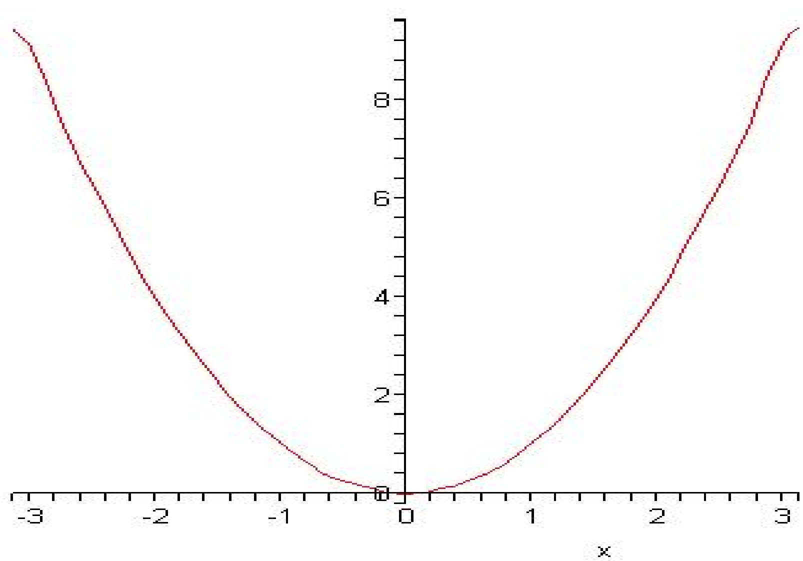


FIG. 3.15 – Courbe de la Sf de $f(x) = x^2$ pour N=9

3.6 Convergence des séries de Fourier

Il est néanmoins naturel dans le cas général de définir les coefficients de Fourier par les formules précédentes, puis de se poser la question de savoir si la série obtenue converge bien vers f. Les choses, malheureusement, ne sont pas toujours aussi simples. Les questions qui se posent donc sont

1. Pour quelles fonctions il y a convergence ?
2. La série de Fourier associée à f est-elle convergente ?
3. En cas de convergence, de quel type de convergence s'agit-t-il ?
   (a) Convergence pour la norme $\| \, . \, \|_2$?
   (b) Convergence simple ?, si oui pour quelles valeurs de x ?
   (c) Convergence uniforme ?,si oui sur quel ensemble ?
4. De plus en cas de convergence, peut-on dire que la série converge vers f ?

Dans le cas général, la série de Fourier peut converger ou non, et si elle converge, elle peut converger vers f ou non. On a donc cherché à préciser des hypothèses sur f assurant la convergence vers f.

Rappelons la notion de discontinuité de première espèce.

Définition 3.6.1 *Une fonction f admet une discontinuité de première espèce en un point a si les limites à droite et à gauche de a existent et sont finies. (Celles-ci ne sont pas forcément égales sauf en cas de continuité.)*

Définition 3.6.2
*On dit qu'une fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ périodique, continue par morcaux est **développable** en série de fourier si elle est somme de sa série de fourier.*

3.6.1 Convergence d'une série trigonométrique.

On rappelle qu'une série de trigonométrique est de la forme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n . \cos(n\omega x) + b_n . \sin(n\omega x)$$

et en notation exponentielle

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n . e^{in\omega x}.$$

$$c_n = \frac{1}{2}\big(a_n - ib_n\big) \quad \text{et} \quad c_n = \frac{1}{2}\big(a_n - + ib_n\big)$$

et

$$a_n = c_n + c_{-n} \quad \text{et} \quad b_n = i(c_n - c_{-n}).$$

Théorème 3.6.1
la série trigonométrique $\frac{a_0}{2}+\sum_{n\geq 1} a_n.\cos(n\omega x)+b_n.\sin(n\omega x)$ *converge normalement sur* $\mathbb{R}$ *si et seulemet si les séries* $\sum |a_n|$ *et* $\sum |b_n|$ *sont convergentes.*
Dans ce la somme de la série trigonométrique est $\frac{2\pi}{\omega}$*-périodoque et continue sur* $\mathbb{R}$*.*

Preuve. La preuve est une conséquence directe de l'inégalité $|a_n.\cos(n\omega x)+b_n.\sin(n\omega x)| \leq |a_n| + |b_n|$.

Corollaire 3.6.1.1

1. *Si les séries* $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$ *et* $\sum_{n\in\mathbb{N}} |b_n|$ *convergent, la somme de la série trigonométrique* $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.\cos(n\omega x)+b_n.\sin(n\omega x)$ *est continue sur* $\mathbb{R}$*.*
2. *Si les séries* $\sum_{n\in\mathbb{N}} |n.a_n|$ *et* $\sum_{n\in\mathbb{N}} n.|b_n|$ *convergent, la somme* $S(x)$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *à dérivée continue, et*
$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} -n.a_n.\cos(n\omega x)+n.b_n.\sin(n\omega x).$$
3. *Plus généralement, si les séries* $\sum_{n\in\mathbb{N}} |n^k.a_n|$ *et* $\sum_{n\in\mathbb{N}} n^k.|b_n|$ *convergent, la somme* S *est de classe* $\mathcal{C}^k$*.*

3.6.2 Convergence simple.

En analyse, le théorème de Dirichlet (ou de Jordan-Dirichlet) est un résultat de convergence ponctuelle pour les séries de Fourier.

Une première version du théorème a été prouvée par Dirichlet en 1829[1]. Faute d'une théorie de l'intégration adéquate, la preuve de Dirichlet ne permet de traiter que des fonctions assez particulières (monotones hors des points d'une subdivision).

Le théorème sera généralisé par Jordan en 1881 pour englober le cas de toutes les fonctions localement à variations bornées.

Une hypothèse plus faible est contenue dans le théorème suivant dit ***THÉORÈME DE DIRICHLET***

Définition 3.6.3
On dit qu'une fonction vérifie les conditions de Dirichlet si elle est continue par morceaux et admet une dérivée continue par morceaux telle que en tout point x_0 *la dérivée admette une limite à gauche et à droite.*

Théorème 3.6.2 *(Théorème de Dirichlet).*
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique de période T de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux $\mathbb{R}$ (mais non nécessairement continue). Alors la série de Fourier associée a f est convergente sur $\mathbb{R}$ pour tout réel x et on a :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \Big[a_n.\cos(nx) + b_n.\sin(nx) \Big] = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

En particulier en tout point x où f est continue la somme de la série de fourier associée à f est $f(x)$. De plus la convergence est uniforme sur tout intervalle où f est continue.

Exemple 3.6.2.1

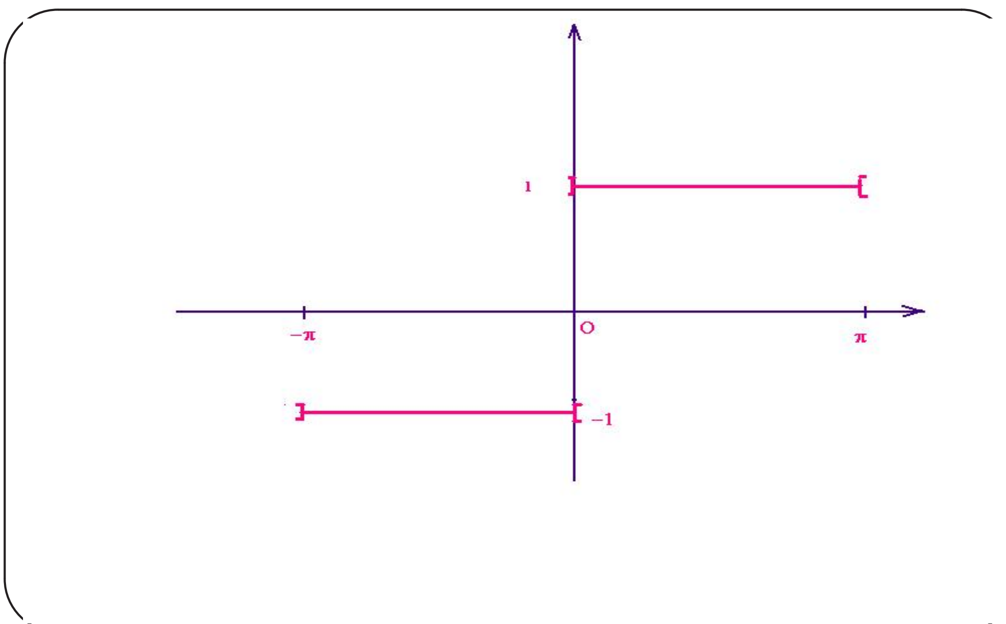
Les coefficients de Fourier de la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si, } 0 < x < \pi, \\ -1 & \text{si, } -\pi < x < 0. \end{cases}$$

sont $a_n = 0$ car f est impaire pour tout n, et

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx = \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx = \int_0^{\pi} \sin(nx) dx = \begin{cases} 0 & \text{si n est pair} \\ \dfrac{4}{n\pi} & \text{si n est impair.} \end{cases}$$



et la série de Fourier associée à f est :

$$S_f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$$

La fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Il y aura convergence simple sans convergence uniforme, et la série converge lentement (terme général en $\frac{1}{n}$). L'approximation est médiocre. Augmenter le nombre de termes ne fait pas disparaître les oscillations au voisinage du point de discontinuité (phénomène de Gibbs).

Remarque 3.6.1

Si f est discontinue, il est impossible qu'il y ait convergence uniforme vers f (puisque les sommes partielles sont continues et pas f) ; ci-dessous la trentième somme partielle de la série de Fourier de la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si}, 0 < x < \pi, \\ -1 & \text{si}, -\pi < x < 0. \end{cases}$$

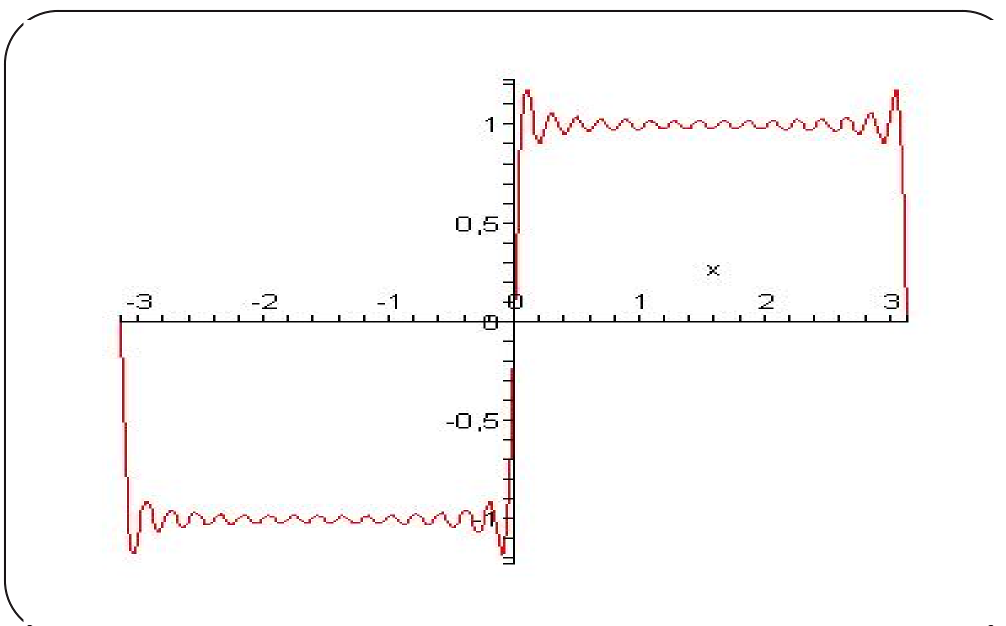


Fig. 3.16 – Courbe de la Sf pour N=31

3.6.3 Convergence normale

Théorème 3.6.3 .

Concéderons une fonction, f, continue par morceaux, périodique de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ et sa série de Fourier

$$\sum a_n.\cos(n\omega x) + b_n.\sin(n\omega x) = \sum c_n e^{in\omega.x}.$$

Les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. *Les séries $\sum a_n^2$ et $\sum b_n^2$ convergent, donc les suites $\big(a_n\big)_n$ et $\big(b_n\big)_n$ tendent vers zéro.*
2. *Si f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, les coefficients de f et sa dérivée f' sont reliées par les relations :*

$$c_n(f') = in\omega.c_n(f); \quad a_n(f') = i.n\omega.b_n(f); \quad b_n(f') = -i.n\omega.a_n(f)$$

3. *Si f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, les séries de termes généraux $\big(n.a\big)_n^2$ et $\big(n.b\big)_n^2$ convergent.*

Démonstration.

1. Notons $P_n(f) = \sum_{k=1}^{n} a_k.\cos(k\omega x)$. On a

$$\int_T \big(P_n(f)(t)\big)^2 dt = \frac{T}{2}\sum_{k=1}^{n}\big(a_k\big)^2.$$

Intéressons-nous à la valeur de $\int_T P_n(f)(t)\big[f(t) - P_n(f)(t)\big]dt$. En développant le premier facteur, $P_n(f)$, dans le produit $P_n(f)(t)\big[f(t) - P_n(f)(t)\big]$, on obtient une somme de termes de la forme $a_p(f)\cos(p\omega x)\big[f(t) - P_n(f)(t)\big]$, avec $1 \le p \le n$.

Le calcul donne $\int_T \cos(p\omega.t)[f(t) - P_n(f)(t)\big]dt = 0$, ce qui implique

$$\int_T P_n(f)(t)[f(t) - P_n(f)(t)\big]dt = 0.$$

Et on en déduit

$$\begin{aligned}
\int_T \big(f(t)\big)^2 dt &= \int_T [f(t) - P_n(f)(t) + P_n(f)(t)\big]^2 dt \\
&= 2.\int_T P_n(f).\big[f - P_n(f)\big](t)dt + \int_T \big[f - P_n(f)\big]^2(t)dt + \int_T \Big[P_n(f)(t)\Big]^2 dt \\
&= \int_T [f(t) - P_n(f)(t)\big]^2 dt + \frac{T}{2}\sum_{k=1}^{n}\big(a_k\big)^2 \ge \frac{T}{2}\sum_{k=1}^{n}\big(a_k\big)^2
\end{aligned}.$$

Ainsi, la série $\sum\big(a_n\big)^2$, car sa suite des sommes partielles est majorée et à termes positifs.

2. En admettant la validité de la formule d'intégration par parties dans le cas où l'une des fonctions est continue et de classe $\mathbb{C}^1$ par morceaux, on a :

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{T}\int_T \big[f(t) - P_n(f)(t)\big]^2 dt + \int_T e^{-i.n\omega.x}dx \\ &= \frac{1}{T}\{\Big[f(t)\frac{f'(t).e^{-i.n\omega.x}}{-i.n\omega.x}\Big]_T - \int_T \frac{e^{-i.n\omega.x}}{-i.n\omega.x}dx\} \quad . \\ &= \frac{1}{i.n\omega.x}.\frac{1}{T}\int_T f'(t)e^{-i.n\omega.x}dx = \frac{1}{i.n\omega.x}c_n(f') \end{aligned}$$

3. La propriété 3) est une conséquence immédiate des propriétés 1) et 2).

Une conséquence de ce théorème est le théorème intéressant suivant

Théorème 3.6.4 .
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique de période T ***contionue*** *de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Alors la série de Fourier associée a f est convergente normalement sur $\mathbb{R}$ et a pour somme la fonction f.*

Démonstration.
Dans ce cas simplifié $T = 2\pi$. Comme $c_n(f) = \dfrac{1}{in}c_n(f')$ on a,

$$|c_n(f)| = \frac{1}{n}|c_n(f')| \leq \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n^2} + |c_n(f')|^2\Big)$$

(On utilise l'inégalité $\Big(ab \leq \dfrac{1}{2}(a^2 + b^2)\Big)$.

Or la série de terme général $c\dfrac{1}{n^2}$ est convergente (série de Riemann, $\alpha = 2 > 1$) et la série $(t)|c_n(f')|^2$ est convergente d'après pa première propriété du Théorème.4.4.5 puisque la fonction f' est **continue par morceaux**. Il en est donc de même de la série de terme général $|c_n(f)|$, ce qui signifie que la série de Fourier $\sum c_n e^{inx}$ est normalement convergente vers une fonction continue F dont les coefficients sont c_n ceux de f et d'après la proposition (**??**) on a $S = f$.

Exemple 3.6.3.1
Les hypothèses du théorème s'appliquent à la fonction $f(x) =| x |$ ou $f(x) = x^2$ sur $[-\pi, \pi]$. On a donc, pour tout x de $[-\pi, \pi]$:

$$| x |= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} \quad et$$

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx).$$

Pour $x = 0$, les deux formules donnent respectivement :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad et \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

Pour $x = \pi$ la deuxième donne $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

La convergence de la série

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$$

est normale, donc uniforme. L'approximation est bonne sur tout l'intervalle, même avec peu de termes.

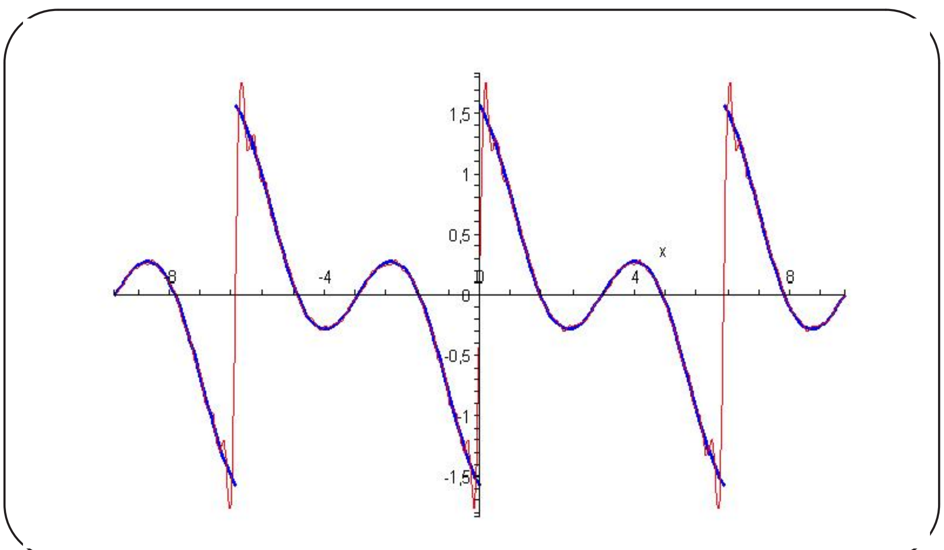
3.6.4 Etude de quelques exemples

Exemple 3.6.4.1

Soit f la fonction impaire 2π-périodique définie sur l'intervalle $]0, 2\pi]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si}, x = 0, \\ \frac{1}{2}(\pi - x)\cos(x) & \text{si}, 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

On représente la fonction f et la série de Fourier associée f dans son développement à l'ordre $N = 20$.

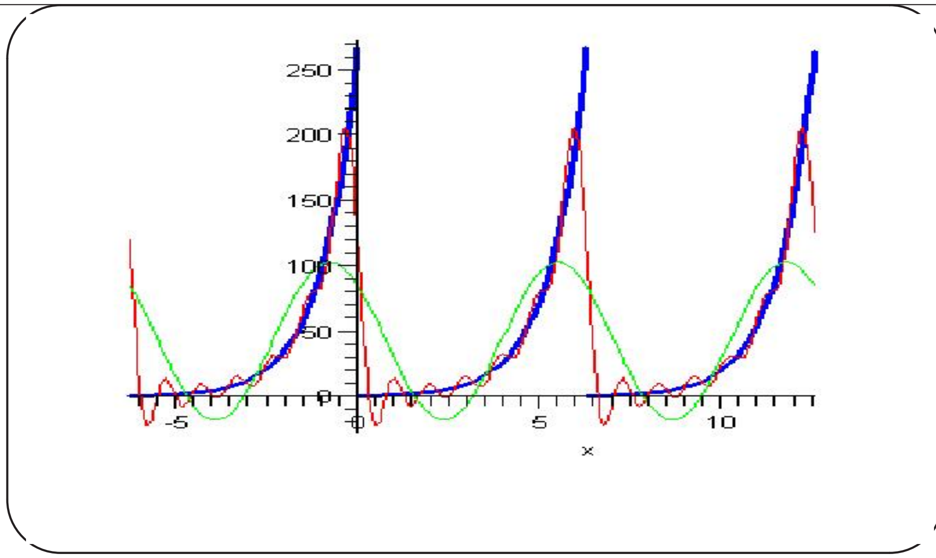


On observe une discontinuité de f (en 0) mais la série de Fourier associée à f est continue.

Exemple 3.6.4.2

Soit fonction 2π- périodique définie sur $]0, 2\pi]$ par

$$f(x) = \sinh(x)$$



*(**couleurs** : f :bleue ; S_f(N=4) :vert ;S_f (N=20) :rouge)*

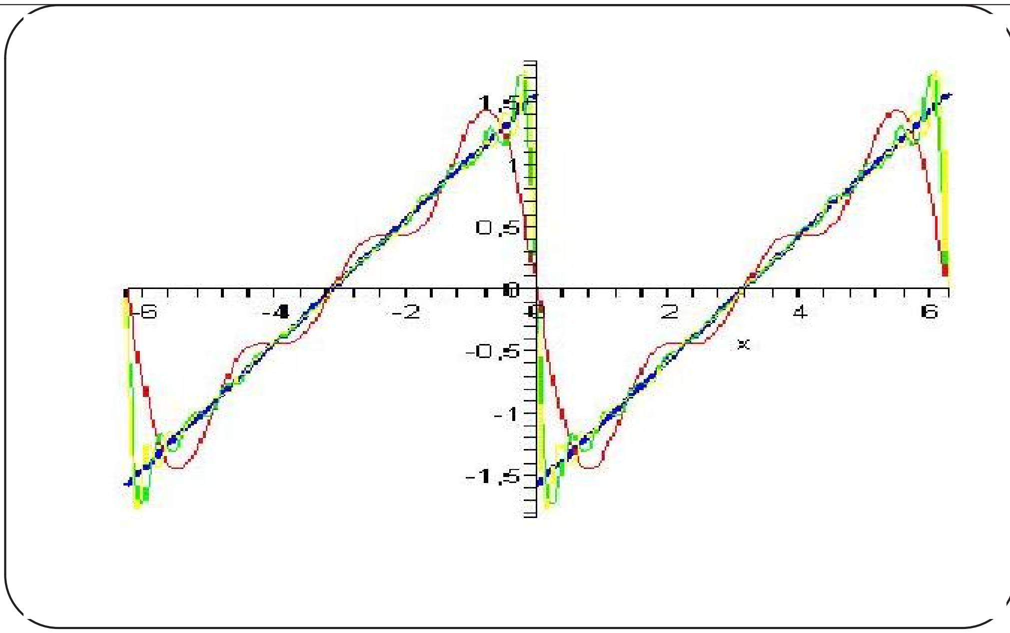
*S_f**=série de Fourier associée***

On observe une grand discontinuité de f mais toutes les séries de Fourier associées à f sont bien continues. (correspond à la proposition 6.4 dans le cours). De plus on voit que avec n très grand, il y a encore un grand dépassement entre f et les séries de Fourier associées à f.On sait que toutes les fonctions périodiques sont developable en série Fourier mais en réalité on trouve que plus que la fonction est «non-général » (par exemple : un signal électrique de forme carré), plus qu'elle est difficile à développer en série de Fourier.

Exemple 3.6.4.3 *Soit fonction 2π- périodique et impaire définie sur $]0, 2\pi[$ par*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si}, x = 0, \\ \frac{1}{2}(x-\pi) & \text{si}, 0 < x < \pi. \end{cases}$$

La série de Fourier de f : f est impaire donc tous les $a_n = 0$. Par calcul direct ou avec Maple, on trouve a $b_n = -\dfrac{1}{n}$.



(f :bleue, S_f(N=6) :rouge, S_f(N=12) :verte, S_f(N=18) :jaune) Encore une fois, on observe une discontinuité de f (en 0) mais la continuité des SF. En plus, on trouve bien que $S_f(x = 0) = 0$ et égale à la moitié de la somme de limite à gauche et limite à droit de f en 0. (théorème de Dirichlet)

3.6.5 Égalité de Parseval et inégalité de Bessel

Théorème 3.6.5 *(Égalité de Parseval)*
Soit $f$une fonction continue, périodique de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega} > 0$, dont la série de Fourier associée converge normalement sur $\mathbb{R}$, et a pour somme f, alors on a pour α réel quelconque :

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{\omega}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+\frac{2\pi}{\omega}} f^2(x)dx = 2\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mid c_n \mid^2$$

où

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \quad et \quad c_n = \frac{a_n + ib_n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Théorème 3.6.6 *(Inégalité de Bessel)*
Soit f une fonction réelle de la variable réelle, périodique de période T ($T = \dfrac{2\pi}{\omega} > 0$) continues par morceaux et admettant un nombre fini de discontinuités de première espèce developable en série de Fourier, alors on a pour α réel quelconque :

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) \leq \frac{\omega}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+\frac{2\pi}{\omega}} f^2(x)dx$$

Cette inégalité a de nombreuses conséquences pratiques.

Corollaire 3.6.5.1
Les séries $\sum a^2$ *et* $\sum b^2$ *convergent.*

Corollaire 3.6.5.2
Les coefficients de Fourier d'une fonction de P *tendent vers* 0 *quand* n *tend vers l'infini.*

Remarque 3.6.2

1. *Si* f *est de période* 2π*, on a :*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2(x)dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$$

2. *Si* f *est paire alors* f^2 *est paire et donc* $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(x)dx$
3. *Si* f *impaire alors* f^2 *est paire et donc* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(x)dx$
4. *Nous admettrons que l'inégalité de Bessel Parseval est en fait une égalité pour toute fonction* f *périodique et de carré integrable*

Exemple 3.6.5.1
Soit la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si}, 0 < x < \pi, \\ -1 & \text{si}, -\pi < x < 0. \end{cases}$$

.

La série de Fourier associée à f *est*

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin(2k+1)}{2k+1}.$$

La formule de Parseval donne

$$\frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx = 1.$$

Donc $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. *On en déduit d'ailleurs une autre sommation*

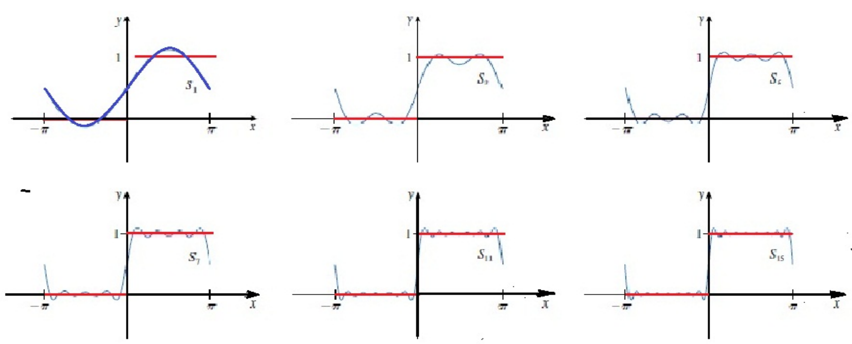
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2}.$$

D'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

ce qui donne

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$



Exemple 3.6.5.2

Soit la fonction $f(x) = | x |$ sur $[-\pi, \pi]$. La séries de Fourier associée est :

$$| x | = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}$$

La formule de Parseval donne

$$\frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{\pi^2} . \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3}$$

Donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

ou encore

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n)^4} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^4} \frac{\pi^4}{90}$$

Exemple 3.6.5.3

Soit f une fonction périodique de période $T = 2\pi$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1, & si\,; x \in]0, \pi[\\ -1, & si\,; x \in]-\pi, 0[\end{cases}$$

f étant une fonction impaire donc $a_n = 0$, pour tout n in$\mathbb{N}$

$b_n == \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi x \sin(nx)dx = \dfrac{2}{n\pi}(1-(-1)^n) = \begin{cases} 0, & si\ n\ est\ pair \\ \dfrac{4}{n\pi}, & si\ n\ est\ impair \end{cases}$

La série de Fourier associée est

$$S_f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} = \begin{cases} 1, & si\,;\ x \in]0, \pi[\\ 0, & si\,; x = 0 \quad ou \quad x = \pi \end{cases}$$

Pour $x = \dfrac{\pi}{2}$, on a

$$S(\frac{\pi}{2}) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

On tire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

Si on applique l'égalité de Parseval on aura

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f^2(t)dt = 1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{16}{\pi^2}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

et l'on tire donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Exemple 3.6.5.4

Soit $f :]-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique de période $T = 2\pi$ définie par $f(x) = x$.

1. *Les discontinuités de f sont les points $x_k = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et sont de première espèce car $f(\pi^+) = \pi$ et $f(\pi^-) = -\pi$.*
2. *f est partout dérivable sauf aux points x_k. En ces points nous avons :*
   $\displaystyle\lim_{x\to\pi^-} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} + 1$ *et* $\displaystyle\lim_{x\to\pi^+} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} + 1$
   f vérifie les conditions de Dirichlet, donc developable en série de Fourier. f est impaire donc $a_0 = a_n = 0$ et $b_n = b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi x \sin(nx)dx = 2\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ et par suit

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)$$

Exemple 3.6.5.5

Soit $f :]-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction périodique de période* $T = 2\pi$ *définie par* $f(x) =\mid x \mid$.

1. *On a* $\mid f(x) \mid \leq \pi$.
2. $f_{[-\pi,0]}$ *est décroissante et continue et* $f_{[0,\pi]}$ *est croissante et continue.*
   En ces points nous avons :
   $\lim\limits_{x\to\pi^-} \dfrac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi} = 1$ *et* $\lim\limits_{x\to\pi^+} \dfrac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi} = 1$
   f *vérifie les conditions du théorème de Jordan , donc developable en série de Fourier. De plus* f *est paire donc :*
   $b_n = 0$
   $a_0 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(x)dx = \dfrac{2}{\pi}\int_0^\pi xdx = \pi$
   $a_n == \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi x\cos(nx)dx = \begin{cases} 0, & si\ n\ est\ pair \\ -\dfrac{4}{\pi.n^2}, & si\ n\ est\ impair \end{cases} \quad 2\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ *et par suit*
   $$f(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$$
   Puisque f *est continue, la convergence est uniforme.*

Remarquons enfin que l'égalité $f(0) = 0$ *se traduit par :*

$$\frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

et par consequent

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Une des particularités des series de Fourier est le calcul des sommes de certaines séries numériques.

Exemple 3.6.5.6

Développer en série de Fourrier la fonction 2π*-périodique définie sur l'intervalle* $]0, 2\pi[$ *par :*

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x & \text{si}, 0 < x < \pi, \\ 1 & \text{si}, \pi < x < 2\pi. \end{cases}$$

Solution

1. *On a* $\mid f(x) \mid \leq \pi$.
2. $f_{[-\pi,0]}$ *est décroissante et continue et* $f_{[0,\pi]}$ *est croissante et continue. En ces points nous avons :*
   $\lim\limits_{x\to\pi^-} \dfrac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi} = 1$ *et* $\lim\limits_{x\to\pi^+} \dfrac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi} = 1$
   f *vérifie les conditions du théorème de Jordan , donc developable en série de Fourier. De plus* f *est paire donc :*

$b_n = 0$

$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x dx = \pi$

$a_n == \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos(nx)dx = \begin{cases} 0, & si\ n\ est\ pair \\ -\frac{4}{\pi.n^2}, & si\ n\ est\ impair \end{cases}$

et par suite

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$$

Puisque f est continue, la convergence est uniforme.

Remarquons enfin que l'égalité $f(0) = 0$ se traduit par :

$$\frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

et par consequent

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Une des particularités des series de Fourier est le calcul des sommes de certaines séries numériques.

CHAPITRE

4

Analyse complexe : Fonctions holomorphes

4.1 Définitions et propriétés

4.1.1 Définitions

Définition 4.1.1
On appelle fonction complexe d'une variable complexe toute application d'une partie de Ω de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.
On note : $f : \Omega \to \mathbb{C}$
$\qquad z \to f(z)$

Remarque 4.1.1

Si on pose $z = x + iy$ et $P(x, y)$ et $R(x, y)$ les parties réelles et imaginaires de f on peut écrire alors $f(z) = P(x, y) + i.R(x, y)$.

$$\begin{cases} P(x,y) = \dfrac{f(z) + \overline{f(z)}}{2}, \\ R(x,y) = \dfrac{f(z) - \overline{f(z)}}{2.i} \end{cases}$$

P et Q sont deux fonctions de deux variables d'une partie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

4.1.2 Graphes de quelques fonctions complexes

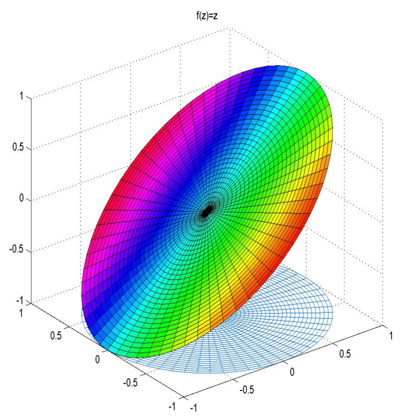


FIG. 4.1 – f(z)=z

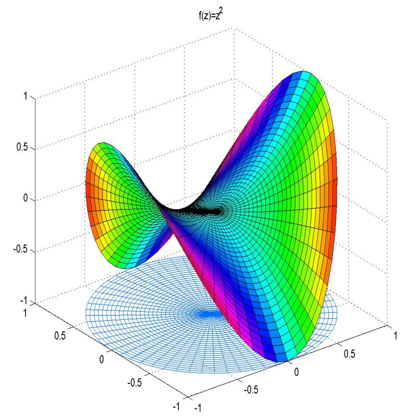


FIG. 4.2 – $f(z) = z^2$

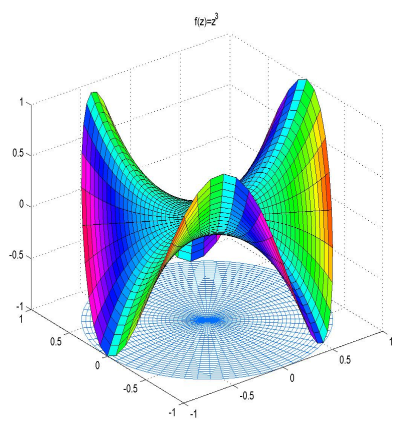


FIG. 4.3 – $f(z) = z^3$

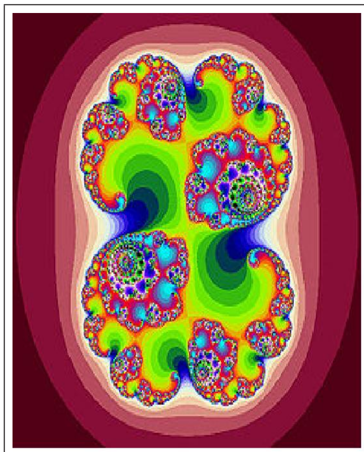


FIG. 4.4 – $P(z) = z^2 + C$

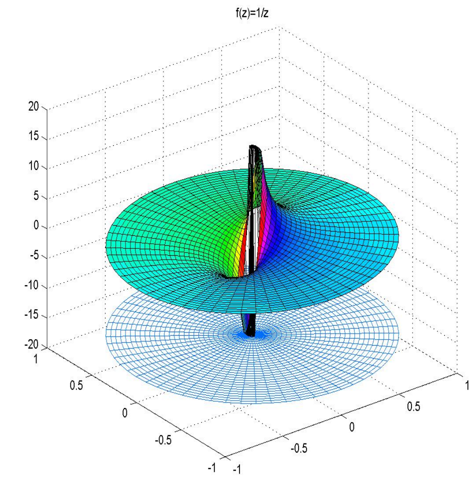


FIG. 4.5 – $f(z) = \dfrac{1}{z}$

4.1.3 Limite et continuité

Définition 4.1.2
Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$, et z_0 un point de Ω.
On dit que f tend vers $l = l_1 + i.l_2$ en z_0, et écrit : $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = l$, si :
$\forall\ 0\ \exists\ \eta_\varepsilon > 0$ *tel que :*
$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon > 0$ *tel que :*

$$0 <\mid z - z_0 \mid < \eta_\varepsilon \Rightarrow \mid\mid f(z) - l \mid < \varepsilon \qquad (1)$$

Remarque 4.1.2
On rappelle que pour $z = x + i.y$ le module de z est :$\mid z \mid = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Donc Si on pose $z_0 = x_0 + i.y_0$, $l = l_1 + i.l_2$ et $f = P + i.R$, la relation (1) prend la forme :
$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon > 0$ *tel que :*

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \eta_\varepsilon \Rightarrow \sqrt{(P(x,y) - l_1)^2 + (Q(x,y) - l_1)^2} < \varepsilon. \qquad (2)$$

Donc $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} (Q(x,y) = l_1$ *et* $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} Q(x,y) = l_2$
Et donc :

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = l \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} (P(x,y) = l_1 \\ \lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} Q(x,y) = l_2 \end{cases}$$

Définition 4.1.3 *On dit que f est continue en z_0, si f tend vers $f(z_0)$ lorsque z tend vers z_0.*

Remarque 4.1.3

Théorème 4.1.1
Soit $f = P+i.Q$ une fonction complexe d'une variable complexe définie sur Ω et $z_0 = x_0+i.y_0 \in \Omega$, alors : f est continue en z_0 si et seulement si : P et Q sont continues en (x_0, y_0).

4.1.4 Fonction holomorphe

Définition 4.1.4
Soit $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, définie au voisinage V_{z_0} d'un point z_0 de Ω.
On dit que f est dérivable (au sens complexe) en z_0 si le rapport :

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

admet une limite finie lorsque z tend vers z_0, appelée dérivée .

On note cette limite

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Remarque 4.1.4

1. *La division est possible dans $\mathbb{C}$ car $\mathbb{C}$ est un corps.*
2. *Les règles de calcul des dérivées au sens complexe sont identiques à celles des dérivées des fonctions d'une variable réelle : linéarité, dérivée d'un produit, d'un quotient, d'une fonction composée.*

Définition 4.1.5
On dit que f est holomorphe sur l'ouvert Ω si elle est dérivable (au sens complexe) en tout point z_0 de Ω. En particulier, on appelle fonction entière une fonction holomorphe dans tout le plan complexe.

Exemples

1. Soit f la fonction définie par : $f(z) = z^2$
   On a : $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = \lim\limits_{z \to z_0} (z + z_0)$
   Pour $z = x + i.y$ et $z_0 = x_0 + i.y_0$ on a :
   $\lim\limits_{z \to z_0} = \lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} (x + x_0) + i.(y + y_0) = 2(x_0) + i.y_0) = 2z_0$

   Donc f est holmomrphe en z_0 et $f'(z_0) = 2z_0$
2. Soit f la fonction définie par : $f(z) = Re(z)$

   Pour $z = x + i.y$ et $z_0 = x_0 + i.y_0$ on a

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{Re(z) - Re(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{x - x_0}{z - z_0}.$$

   Or

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{(x-x_0)^2-i.(x-x_0)(y-y_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}, \tag{3}$$

(On multiplie par le conjugué).
La relation (3) prend la forme

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}-i\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{(x-x_0)(y-y_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

qui existe si et seulement si :

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

et

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{(x-x_0)(y-y_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

existent.
Os pour la direction $y=y_0$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=1$$

et pour $x=x_0$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{(x-x_0)(y-y_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=0$$

On trouve donc deux limites différentes suivant deux directions différentes par suite

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}-i\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{(x-x_0)(y-y_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

n'existe pas. La fonction n'est donc pas holomorphe sur $\mathbb{C}$.

3. Toute fonction polynôme à coefficients complexes est holomorphe sur $\mathbb{C}$.
4. Toute fonction rationnelle à coefficients complexes est holomorphe sur le complémentaire de l'ensemble de ses pôles.

Remarque 4.1.5

Pour le premier exemple si on pose : $f=P+iQ$ on a $P(x,y)=x^2-y^2$ et $Q(x,y)=2xy$ et on remarque que P et Q sont differentiables et :

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}$$

et

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Par contre pour le deuxième exemple si on pose : $f=P+iQ$ on a $P(x,y)=x$ et $Q(x,y)=0$ et on remarque que P et Q sont differentiables et

$$\frac{\partial P}{\partial x} \neq \frac{\partial Q}{\partial y}$$

et

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

On a alors le théorème suivant appelé **théorème de Chauchy**

Théorème 4.1.2 ***théorème de Chauchy***
Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$, définie au voisinage V_{z_0} d'un point z_0 de Ω, avec $f = P + i.Q$. Alors :
f est homolorphe en z_0 si et seulement si :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y} \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x} \end{cases}$$

Démonstration
Soit f holomorphe en z_0 et $f'(z_0) = \alpha + i.\beta = \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$. En posant $z + z_0 = h$ on obtient

$$f'(z_0) = \alpha + i.\beta = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

Donc : $f(z_0 + h) - f(z_0 = h.f'(z_0) + \varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.

$$f(z_0 + h) - f(z_0 = h.f'(z_0) + \mid h \mid (\frac{h}{\mid h \mid}\varepsilon(h)) = h.f'(z_0) + \mid h \mid \theta(h), \tag{4}$$

$\lim\limits_{h \to 0} \theta(h) = 0$.
La relation (4) s'écrit

$$\begin{cases} P(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - P(x_0, y_0) = \alpha.h_1 - \beta.h_2 + \mid h \mid Re(\theta(h)), \lim\limits_{h \to 0} Re(\theta(h)) = 0 \\ Q(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - Q(x_0, y_0) = \alpha.h_1 + \beta.h_2 + \mid h \mid Im(\theta(h)), \lim\limits_{h \to 0} Im(\theta(h)) = 0 \end{cases}$$

Ces deux expressions montrent la differeniabilité de P et Q et on a

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \beta = \dfrac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) = -\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) \end{cases}$$

Corollaire 4.1.4.1
Soit $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, holomorphe sur Ω, avec $f = P + i.Q$ telles que P et Q sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω.Alors P et Q vérifient l'équation de Laplace

$$\begin{cases} \Delta P(x, y) = 0 \\ \Delta Q(x, y) = 0 \end{cases}$$

Démonstration

f holomorphe

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \end{cases}$$

On a :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 P}{\partial^2 y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 P}{\partial^2 x}(x,y) = -\dfrac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x}(x,y) \end{cases}$$

Et d'après le lemme de Schwartz on a : $\Delta P(x,y) = 0$..
On démontre de la même façon que : $\Delta Q(x,y) = 0$.

4.1.5 Opérations algébriques sur les fonctions holomorphes

4.1.5.1 Sommes de deux fonctions holomorphes

Théorème 4.1.3
Soient f et g deux fonctions définies sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$.
Si f et g sont holomrphes en z_0 (sur Ω) alors la fonction somme, notée $f+g$ définie par : $(f+g)(z) = f(z) + g(z)$ pour tout $z \in \Omega$, est holomorphe en z_0 (sur Ω).

4.1.5.2 Produit de deux fonctions holomorphes

Théorème 4.1.4
Soient f et g deux fonctions définies sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$.
Si f et g sont holomrphes en z_0 (sur Ω) alors la fonction somme, notée $f.g$ définie par : $(f.g)(z) = f(z).g(z)$ pour tout $z \in \Omega$, est holomorphe en z_0 (sur Ω).

4.1.5.3 Quotient de deux fonctions holomorphes

Théorème 4.1.5
Soient f et g deux fonctions définies sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$.
Si f et g sont holomrphes en z_0 (sur Ω) et $g(z_0) \neq 0$ ($g(z) \neq 0$) alors la fonction somme, notée $\dfrac{f}{g}$ définie par : $(\dfrac{f}{g})(z) = \dfrac{f(z)}{g(z)}$ pour tout $z \in \Omega$, est holomorphe en z_0 (sur Ω).

Corollaire 4.1.5.1

1. *Tout fonction polynôme en z, $f(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_n z^n$, est holomrphe sur $\mathbb{C}$.*
2. *Tout fonction rationnelle est holomrphe sur $\mathbb{C}$.*

4.1.6 Fonctions holomorphes élémentaires

4.1.6.1 Fonction exponentielle complexe

Définition 4.1.6
On appelle fonction exponentielle complexe la somme de la série entière $\sum \frac{1}{n!}z^n$, *et on la note :* $exp(z) = e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}z^n$.

Propriétés

1. La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{C}$.
2. La fonction exponentielle est holomorphe en tout point de $\mathbb{C}$, et $e'^z = e^z$.
3. La fonction exponentielle est périodique de période $2i\pi$. ($e^{z+2i\pi} = e^z e^{2i\pi}$).
4. La fonction exponentielle n'est pas bijective. (car elle est périodique).

Théorème 4.1.6
La fonction exponentielle est bijective de $\Delta_\alpha = \{z \in \mathbb{C}/\alpha \leq arg(z) \leq \alpha + 2\pi\}$ *dans* $\mathbb{C} \setminus D_\alpha = \{z \in \mathbb{C}/z = re^{i\alpha}, r \geq 0\}$

Démonstration
Soit $Z \in \mathbb{C} \setminus D_\alpha$. Cherchons $z \in \Delta_\alpha$ tel que : $e^z = Z$ ce qui est équivaut à dire que :

$$\begin{cases} \mid e^z \mid = \mid Z \mid \\ arg(e^z) = arg(Z) + dk\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} \mathcal{R}e(e^z) = \mid Z \mid \\ \mathcal{I}(z) = arg(Z) + dk\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{R}e(z) = log \mid Z \mid \\ \mathcal{I}(z) = arg(Z) + dk\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

On doit avoir donc $\alpha < \mathcal{I}(z) < \alpha + 2\pi$

mais $\alpha < arg(Z) + 2k\pi < \alpha + 2\pi \Leftrightarrow \frac{\alpha - arg(Z)}{2\pi} < k < \frac{\alpha - arg(Z)}{2\pi} + 1$

il faut que $\frac{\alpha - arg(Z)}{2\pi}$ n'appartienne pas à $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire que $arg(Z) \neq 2n\pi + \alpha$ pour tout n de $\mathbb{Z}$.

4.1.6.2 Détermination du logarithme

Définition 4.1.7
On appelle détermination du logarithme, qu'on note $log_\alpha(z)$, *la la fonction réciproque de la fonction exponentielle définie de* Δ_α *dans* $\mathbb{C} \setminus D_\alpha$.
On a : $\forall z \in \mathbb{C} \setminus D_\alpha$

$$log_\alpha(z) = log_\alpha(\mid z \mid) + iarg(z)$$

avec $arg(z) \in]\alpha, \alpha + 2\pi[$.

Remarque 4.1.6

Si $\alpha = \pi$ log_π coincide avec le logarithme réel sur $]0, +\infty[$.

Proposition 4.1.1

La fonction : log_α est est continue et holmorphe sur $\mathbb{C}\backslash D_\alpha$, et on a :

$$log'_\alpha(z) = \frac{1}{z}$$

4.1.6.3 Continuité

Soit $a \in \mathbb{C} \setminus D_\alpha$. On a :

$log_\alpha(z) = log_\alpha(\mid z \mid) + iarg(z)$ avec $arg(z) \in]\alpha, \alpha + 2\pi[$. Pour $z = x + iy$, $x = rcos(\theta)$ et $y = rsin(\theta)$ on a : $log_\alpha(z) = log_\alpha(\sqrt{x^2 + y^2}) + iarg(arctan(\frac{y}{x})$

d'où la continuité.

4.1.6.4 Holomorphie

Si on pose $u = log_\alpha(z)$ et $b = log_\alpha(a)$ alors $z = e^u$ et $a = e^b$ et on a :

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \lim_{u \to b} \frac{u - b}{e^u - e^b} = \frac{1}{e^b} = \frac{1}{a}$$

4.1.7 Séries de Laurent

En analyse complexe, la série de Laurent (aussi appelée développement de Laurent) d'une fonction holomorphe f est une manière de représenter f au voisinage d'une singularité, ou plus généralement, autour d'un "trou" de son domaine de définition. On représente f comme somme d'une série de puissances (positives et négatives) de la variable complexe.

Une fonction f d'une variable complexe est holomorphe si elle présente une régularité supérieure à la continuité. On peut directement supposer f developable en séries entières au voisinage de chaque point de son domaine de définition. Autrement dit, au voisinage d'un point a où f est définie, on peut écrire $f(z)$ sous la forme :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n.$$

On a fait apparaître une série entière en a, qui est la série de Taylor de f en a. Les séries de Laurent peuvent être vues comme une extension pour décrire f autour d'un point où elle n'est pas (a priori) définie. On inclut les puissances négatives ; une série de Laurent se présentera donc sous la forme :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - a)^n.$$

Les séries de Laurent furent nommées ainsi après leur publication par Pierre Alphonse Laurent en 1843. Karl Weierstrass les découvrit le premier mais il ne publia pas sa découverte.

Le plus souvent, les auteurs d'analyse complexe présentent les séries de Laurent pour les fonctions holomorphes définies sur des couronnes, c'est-à-dire des ouverts du plan complexe délimitées par deux cercles concentriques. Mais elles permettent de mieux comprendre le comportement d'une fonction holomorphe autour d'une singularité.

Si f une fonction holomorphe tend vers l'infini ou cesse d'être holomorphe dans une région, on peut néanmoins sauver la série entière, *à condition d'admettre aussi des puissances négatives.*

Une couronne centrée en a est un ouvert du plan complexe $\mathbb{C}$ délimité par au plus deux cercles de centre a. En général, une couronne est délimitée par deux cercles de rayons respectifs $r < R$, on la note $C(a, r, R) = \{r <| z - a |< R\}$. Plusieurs cas dégénérés peuvent toutefois être envisagés :

1. Si R vaut l'infini, la couronne considérée est le complémentaire du disque fermé de centre a et de rayon r ;
2. Si r vaut 0, la couronne correspond au disque ouvert de centre a et de rayon R, privé de a. On parle aussi dans ce cas de disque épointé ;
3. Si r vaut 0 et R l'infini, alors la couronne est le plan complexe privé du point a.

Définition 4.1.8 *(Série de Laurent)*
Soit $\sum a_n.z^n$ *une série entière de rayon de convergence R. On considère une série* $\sum a_{-n}.z^{-n}$ *de rayon de convergence* $\frac{1}{R'}$ *avec* $(R' < R)$.
Soit z *tel que* $R' <| z |< R$ *alors les séries* $\sum a_n.z^n$ *et* $\sum a_{-n}.z^{-n}$ *sont convergentes en même temps et la série*

$$\sum a_n.z^n + \sum a_{-n}.z^{-n}$$

est convergente pour tout z *tel que* $R' <| z |< R$.
Cette série est dite série de Laurent sur la couronne $C(0; R'; R)$ *elle est notée* $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n.z^n$ *et sa somme est* $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n.z^n$
Autrement dit : Une série de Laurent est la somme S *d'une série entière en* z *et une série entière en* $\frac{1}{z}$ *:*

$$S(z) = A(z) + B(\frac{1}{z}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \frac{1}{z^n} = \sum_{0}^{+\infty} c_n z^n$$

avec $c_n = a_n$ *si* $n > 0$, $c_0 = a_0 + b_0$ *et* $c_n = b_{-n}$ *si* $n < 0$.

Remarque 4.1.7
Cette extension a été présentée par P.A.Laurent (1813-1854, ingénieur de l'armé) à Cauchy, qui en a parlé à l'Académie (citation : L'extension de M.Laurent...nous parît digne de remarque), mais qui ne l'a pas trouvé digne *de publication.*

4.1.8 Développement de Laurent

Soit $C(a, r, R) = \{r <| z - a |< R\}$.

Définition 4.1.9
Soit f *une fonction analatytique.* f *est dite développable en série de Laurent en* a *sur la couronne* $C(a, r, R) = \{r <| z - a |< R\} \subset \Omega$ *si la fonction* $z \longrightarrow f(a + z)$ *coincide avec la somme d'une série de Laurent sur* $C(0, r, R)$.

Proposition 4.1.2
Toute fonction developable en série de Laurent dans une couronne est holomorphe sur cette couronne.

Théorème 4.1.7
Pour toute fonction holomorphe f sur la couronne $C(a, r, R)$ centrée en a, il existe une unique *suite $(a_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ qui* dépend seulement *de f telle que :*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n,$$

où la série de fonctions converge normalement sur tout compact *de la couronne $C(a, r, R)$. De plus, les coefficients an sont donnés par :*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}}$$

où γ est le paramétrage d'un cercle de centre a tracé dans la couronne.

Exemple

Une fonction rationnelle est holomorphe en dehors de ses pôles. On exprime la série de Laurent d'une fonction rationnelle F en un pôle a, en calculant la série de Taylor de $(z-a)^n F(z)$ avec n suffisamment grand. Par exemple, on trouve la série de Laurent en j (racine troisième de l'unité) :

$$\frac{1}{1+z+z^2} = -\frac{1}{3} \sum_{n\geq -1} \left(-\frac{(z-j)}{\sqrt{3}}\right)^n.$$

En effet, j et j^2 sont les racines du polynôme $1+Z+Z^2$. On est donc en mesure d'écrire, avec $y = z-j$:

$$\frac{1}{1+z+z^2} = \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{y+\sqrt{3}} = \frac{1}{y\sqrt{3}} \sum_{n\geq 0} \left(\frac{-y}{\sqrt{3}}\right)^n.$$

Ce genre de techniques se généralise en algèbre pour développer des fractions rationnelles en série de Laurent formelle (ou série méromorphe formelle). Ce type de développement peut en effet être adapté sur tout anneau.

4.1.8.1 Application des séries de Laurent

Une des applications des séries de Laurent est la caractérisation des points singuliers : si f est holomorphe dans un ouvert $C(z_0, r, R)$, sauf en z_0, et si est la série de Laurent de f en z_0 , alors :

1. $a_n = 0$ pour tout $n < 0$ si, et seulement si, z_0 est ***une singularité supprimable*** (éliminable) pour f.
2. a_{-m} est non nul, mais cn est nul si $n < -m$: z_0 est alors un pôle de f, de ***multiplicité*** m.
3. $a_n = 0$ est non nul pour une infinité de n négatifs : z_0 est alors un point ***singulier essentiel***.

4.2 Intégrales complexes

4.2.1 primitive d'une fonction

Définition 4.2.1
Soit $\begin{cases} f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ \quad z \to f(z) \end{cases}$ *On dit que* f *admet une primitive* F *sur* Ω *si :*
Pour tout z *de* Ω $F'(z) = f(z)$.

Remarque 4.2.1 *La fonction primitive est holomorphe.*

4.2.2 Intégrales complexes

Question. Comment définir une intégrale complexe :$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz$? si le point z passe de z_0 à z_1 le long d'une courbe arbitraire γ.

Définition 4.2.2
Un chemin sur $\mathbb{C}$ *est par définition un couple* $([a,b],\varphi)$ *où*
$\begin{cases} \varphi : [a,b] \to \mathbb{C} \\ \quad t \to \varphi(t) = \varphi_1(t) + i\varphi_2(t) \end{cases}$
On note γ *le support de ce chemin* $(\gamma = \phi([a,b]))$.
On dit que le chemin est de classe $\mathcal{C}^k$ *si* ϕ *est de classe* $\mathcal{C}^k$. $\phi(a)$ *et* $\phi(b)$ *sont les extrémités du chemin.*
Si $\phi(a) = \phi(b)$ *le chemin est appelé : lacet.*

Définition 4.2.3
Soit γ *le support d'un chemin de classe* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux* $([a,b],\varphi)$ *et soit* $\begin{cases} f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ \quad z \to f(z) \end{cases}$
On appelle intégrale complexe de f *le long de* γ *le nombre, noté* $\int_\gamma f(z)dz$*,défini par :*

$$\int_\gamma f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

où $\varphi'(t) = \varphi_1'(t) + i\varphi_2'(t)$

Proposition 4.2.1
Pour toute fonction f *et toute courbe* γ *on a :*

$$\int_{\gamma^+} f(z)dz = -\int_{\gamma^-} f(z)dz$$

Définition 4.2.4
La longueur d'une courbe γ définie par $([a,b],\varphi)$, avec $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ est définie par

$$L(\gamma) = \int_{\gamma^+} dz = \int_a^b \mid \varphi'(t) \mid dt$$

Remarque 4.2.2

$$\mid \int_{\gamma^+} f(z)dz \mid \leq \max_{z\in\gamma} \mid f(z) \mid L(\gamma)$$

Remarque 4.2.3
Si on pose $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$ on aura

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= \int_a^b \varphi(t)\varphi'(t)dt \\ &= \int_a^b (P(\varphi_1(t),\varphi_2(t)) + iQ(\varphi_1(t),\varphi_2(t)))(\varphi_1'(t) + i\varphi_2'(t))dt\end{aligned}$$

$$= \int_a^b ((Po\varphi)(t)\varphi_1'(t) - (Qo\varphi)(t)\varphi_2'(t))dt + i\int_a^b ((Qo\varphi)(t)\varphi_1'(t) + (Po\varphi)(t)\varphi_2'(t))dt$$

D'où

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma \omega + i\int_\gamma \overline{\omega}$$

Où ω et $\overline{\omega}$ sont les formes différentielles définies par

$$\begin{cases} \omega = P(x,y)dx - Q(x,y)dy \\ \overline{\omega} = Q(x,y)dx + P(x,y)dy \end{cases}$$

Proposition 4.2.2
Soit f une fonction complexe définie dans un secteur du demi plan supérieur telle que : $\lim_{|z|\to+\infty} f(z) = 0$. Alors

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma^+} f(z)e^{iz}dz = 0.$$

où est l'arc de centre O et de rayon R contenue dans le secteur.

Exemple 4.2.2.1
Calcul de $\displaystyle\int_{\gamma^+} \frac{xdy + ydx}{x^2+y^2}$ et et $\displaystyle\int_{\gamma^+} \frac{-ydx + xdy}{x^2+y^2}$.
Soit l'intégrale $\displaystyle\int_{\gamma^+} \frac{dz}{z}$, $\gamma^+ = \partial^+ D(O,r)$.
Si on pose $z = re^{i\theta}$ alors :

$$\int_{\gamma^+} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{rie^{i\theta}}{re^{i\theta}} d\theta = 2i\pi \tag{5}$$

D'autre part pour $z = s + iy$ *on a :* $f(z) = \dfrac{1}{x+iy} = \dfrac{x-iy}{x^2+y^2} = P(x,y) + iQ(x,y)$

Donc

$$\int_{\gamma^+} \frac{dz}{z} = \int_{\gamma^+} \frac{xdy + ydx}{x^2+y^2} + i\int_{\gamma^+} \frac{-ydx + xdy}{x^2+y^2} \tag{6}$$

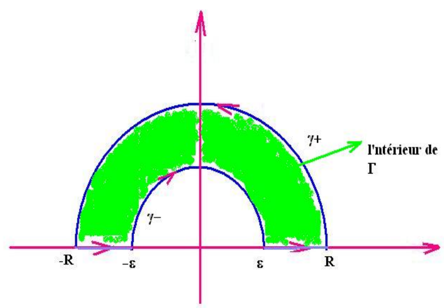
En comparant les relations (5) et (6) on aura :
$\displaystyle\int_{\gamma^+} \frac{xdy+ydx}{x^2+y^2} = 0$ *et* $\displaystyle\int_{\gamma^+} \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2} = 2\pi.$

Exemple 4.2.2.2

Calcul de $\displaystyle\int_{\gamma^+} \frac{sin(x)}{x}$.

Soit l'intégrale
$\displaystyle\int_{\gamma^+} \frac{e^{iz}}{z}dz$, γ^+ *est le demi-cercle supérieur.*

Considérons Γ le chemin orienté dans le sens positif : $\Gamma^+ = \gamma^+ + [-R, \varepsilon] + [\varepsilon, R] + \gamma_1^-$.



La fonction f *est holomorphe à l'intérieur de* Γ *donc* $\displaystyle\int_{\gamma^+} \frac{e^{iz}}{z}dz = 0.$

$\displaystyle\int_{\Gamma^+} \frac{e^{iz}}{z}dz = \int_{\gamma^+} \frac{e^{iz}}{z}dz + + \int_{-R}^{\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x}dx + \int_{\epsilon}^{R} \frac{e^{ix}}{x}dx + \int_{\gamma_1^-} \frac{e^{iz}}{z}dz$

Donc $\displaystyle\int_{-R}^{\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x}dx + \int_{\epsilon}^{R} \frac{e^{ix}}{x}dx = -\int_{\gamma^+} \frac{e^{iz}}{z}dz + \int_{\gamma_1^+} \frac{e^{iz}}{z}dz \Leftrightarrow 2i\int_{\varepsilon}^{R} \frac{sin(x)}{x}dx = -\int_{\gamma^+} \frac{e^{iz}}{z}dz + \int_{\gamma_1^+} \frac{e^{iz}}{z}dz$

Pour R *tendant vers l'infini et tendant vers* 0, *le premier membre tend vers* $2i\int_0^{+\infty} \frac{sin(x)}{x}dx$ *Le premier terme du deuxième membre tend vers* 0.

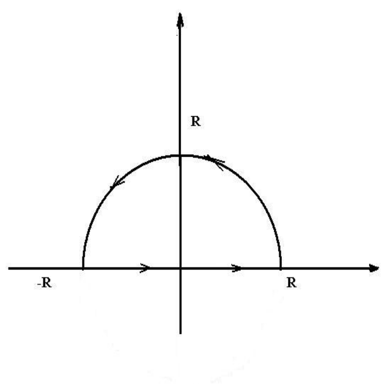
Et $\displaystyle\int_{\gamma_1^+} \frac{e^{iz}}{z}dz = i\pi$. *Donc :*

$$\int_0^{+\infty} \frac{sin(x)}{x}dx = \frac{\pi}{2}$$

4.2.3 Lemme de Jordan

Lemme 4.2.1
Soit γ l'arc de cercle de centre $a \in \mathbb{C}$, de rayon R et d'angle θ et soit f une fonction continue sur γ.
Si $\mid z-a \mid\mid f(z) \mid$ tend vers zéro lorsque R tend vers l'infini(resp. vers 0) alors $\int_{\gamma} f(z)dz$ tend vers zéro lorsque R tend vers l'infini(resp. vers 0).

Exemple 4.2.3.1 *Soit f la fonction définie par : $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$.*
Soit l'arc de cercle de centre O et de rayon $R > 1$ et d'angle $\theta = \pi$ situé dans le demi plan supérieur.



On a : $\mid z \mid\mid f(z) \mid = \dfrac{R}{\mid z^2+1 \mid}$ et $\mid z^2+1 \mid \geq \mid 1- \mid z^2 \mid\mid$, donc $\mid z \mid\mid f(z) \mid \leq \dfrac{R}{\mid 1-R^2 \mid} \to 0$ lorsque $R \to +\infty$ donc d'après le lemme de Jordan : $lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma} \dfrac{1}{z^2+1} dz = 0$

4.2.4 Formule intégrale de Cauchy

Définition 4.2.5
On dit qu'un domaine D
subset$\mathbb{C}$ est étoilé s'il existe un centre c de D tel que !

$$\forall z \in D le\ segment [c, z] \subset D$$

Théorème 4.2.1
Soit D un ouvert étoilé de $\mathbb{C}$ et γ une courbe fermée parcourant la frontière ∂D de D dans le sens positif et soit f une fonction holomorphe sur D et continue sur $\overline{D}$. Alors pour tout $z \in D$ on a :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial^+ D(a,r)} \frac{f(u)}{u-z} du$$

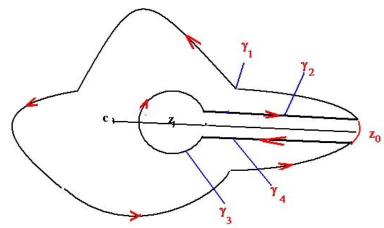
Démonstration

On prouve que $\forall z \in \gamma^+ = \partial^+ D(a,r)$:

$$\int_{\gamma^+} \frac{f(z)}{u-z} du = 2i\pi f(z).$$

Si on pose $g(z) = \dfrac{f(u)}{u-z}$

Soit alors g est holomorphe à l'intérieur de $D(a,R)$ sauf en $u=z$. On doit ôter ce point chirurgicalement. Soit alors le domaine $D* = D(a,R) \setminus [z_0, z]$ (z_0 étant la projection de z sur la frontière de D à partir du centre de l'étoilé) ; ce domaine est étoilé pour le centre.



Considérons γ le chemin orienté dans le sens positif :

$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$.

Alors $\displaystyle\int_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{u-z} du = 0$

$$\Leftrightarrow \int_{\gamma_1^+} g(u)du + \int_{\gamma_2^-} g(u)du + \int_{\gamma_3^-} g(u)du + \int_{\gamma_4^+} g(u)du = 0$$

Lorsque ε tend vers 0 on a :

$$\int_{\gamma_2^-} g(u)du + \int_{\gamma_4^+} g(u)du = 0$$

Donc

$$\int_{\gamma_1^+} g(u)du = \int_{\gamma_3^+} g(u)du$$

$$\Leftrightarrow \int_{\gamma_1^+} \frac{f(u)}{u-z} du = \int_{\gamma_3^+} \frac{f(u)}{u-z} du$$

$$\Leftrightarrow \int_{\gamma^+} \frac{f(u)}{u-z} du = \int_{\gamma^+(z,\varepsilon)} \frac{f(u)}{u-z} du$$

Or $\displaystyle\int_{\gamma^+(z,\varepsilon)} \frac{f(u)}{u-z} du = \int_{\gamma^+(z,\varepsilon)} \frac{f(z)}{u-z} du + \int_{\gamma^+(z,\varepsilon)} \frac{f(u)-f(z)}{u-z} du$

ou

$$\int_{\gamma^+(z,\varepsilon)} \frac{f(z)}{u-z} du = f(z) \int_{\gamma^+} \frac{1}{u-z} du + \int_{\gamma^+(z,\varepsilon)} \frac{f(u)-f(z)}{u-z} du$$

Si on pose $u - z = \varepsilon.e^{i\theta}$ on aura :

$$f(z)\int_{\gamma^+(z,\varepsilon)} \frac{1}{u-z}du = f(z)\int_0^{2\pi} \frac{i\varepsilon e^{i\theta}}{\varepsilon e^{i\theta}}du = 2i\pi$$

Donc

$$\int_{\gamma^+(z,\varepsilon)} \frac{f(u)}{u-z}du = 2i\pi f(z) + \int_{\gamma^+(z,\varepsilon)} \frac{f(u)-f(z)}{u-z}du$$

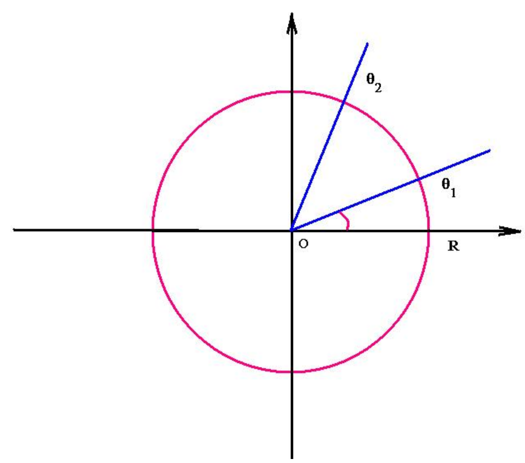
mais

$$lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma^+(z,\varepsilon)} \frac{f(u)-f(z)}{u-z}du = 0$$

D'où le résultat.

Intégrale particulièrement importante $f(z) = \frac{1}{z}$.

La fonction f est holomorphe partout sauf en 0. Intégrons le long d'un cercle γ^+ de centre O et de rayon R.



On pose $z = Re^{i\theta}$ donc $dz = Rie^{i\theta}d\theta$ donc :

$$\int_{\gamma^+} \frac{dz}{z} = \int_o^{2\pi} \frac{Rie^{i\theta}}{Re^{i\theta}}d\theta\theta = 2i\pi$$

On trouve dans le cas général sur un arc de cercle γ^+ d'angle délimité par θ_1 et θ_2 :

$$\int_{\gamma^+} \frac{dz}{z} = \int_o^{2\pi} \frac{Rie^{i\theta}}{Re^{i\theta}}d\theta\theta = i\theta_2 - \theta_1$$

Exercice 4.2.1

Calculer les intégrales suivantes :

1- $lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma^+} \frac{e^z}{z-2}dz$ *et* $lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma^+} \frac{e^z}{2z-1}dz$

où γ *est le cercle de centre o et de rayon 1.*

2-$lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma^+} \frac{sh(z)}{(z^2+1)(z+3)}dz$

où γ *est le périmètre du rectangle limité par* $x=-1$, $y=0$, $x=2$ *et* $y=2$.

Conséquence de l'intégrale de Cauchy : dérivées supérieures

Corollaire 4.2.4.1
Soit Ω un domaine étoilé de $\mathbb{C}$ et $D(a,r)$ un disque fermée contenu dans Ω et soit f une fonction holomorphe sur Ω. Alors pour tout $z \in D(a,r)$ on a ;

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\partial^+ D(a,r)} \frac{f(u)}{(u-z)^{n+1}} du$$

4.2.5 Inégalité de Cauchy

Théorème 4.2.2
Soit D un ouvert étoilé de $\mathbb{C}$ et γ une courbe fermée parcourant la frontière ∂D de D dans le sens positif et soit f une fonction holomorphe sur D et continue sur $\overline{D}$. Supposons qu'il existe un réel M tel que pour tout $\zeta \in \partial D \mid f(\zeta) \mid \leq M$. Alors pour tout $z \in D$

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi} . \frac{ML(\gamma)}{r^{k+1}}$$

où r est la plus petite distance du point z au bord ∂D, de D.

4.2.6 Points singuliers d'une fonction d'une variable complexe

Définition 4.2.6
Soit $\begin{cases} f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \to f(z) \end{cases}$ On dit que z_0 est un point singulier si f n'est pas holomorphe en z_0 , et qu'il est singulier isolé s'il existe un disque $D(z_0, r) subset \Omega$ tel que soit holomorphe sur $D(z_0, r)$ sauf en z_0

4.2.7 Pôles d'une fonction d'une variable complexe

Définition 4.2.7
On dit su'un point singulier z_0 est un pôle d'ordre k pour f si $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-z_0)^k}$, avec g une fonction holomorphe au voisinage de $z0$ et $g(z_0) \neq 0$.

Exemples

1- $f(z) = \dfrac{1}{z}$ admet pour pôle simple 0.

2- $f(z) = \dfrac{1}{z-i}$ admet pour pôle simple i.

3- $f(z) = \dfrac{z+1}{z^2+1}$ admet pour pôles simples i et $-i$.

4- $f(z) = \dfrac{e^z}{(z-1)^2}$ admet pour pôle double i .

4.3 Théorème des résidus

4.3.1 Les résidus : Définitions et théorèmes

résidu [ré-zi-du] n.m (du lat. résidus, qui est de reste). Ce qui reste

Le théorème des résidus généralise le théorème de Cauchy aux fonctions ayant des singularités isolées à l'intérieur du chemin d'intégration.

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe dans un disque $D(z_0, r)$, à l'exception du point z_0 qu'on appelle *singularité isolée*.

On peut appliquer la série de Laurent au *disque épointé*

$$D^*(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}; 0 <| z - z_0 |< r\} = D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$$

f s'écrit donc sous la forme : $f(z) = \dfrac{g(z)}{z - z_0}$ où g est une fonction holomorphe au voisinage de z_0 te $g(z_0) \neq 0$.

g est developable en série entière au voisinage de z_0 et on a :

$$g(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

et

$$f(z) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{a_i}{(z - z_0)^{k-i}} + a_k + \sum_{i=k+1}^{k} a_i (z - z_0)^i.$$

Et soit $h(z) = (z - z_0) f(z)$

Définition 4.3.1
On appelle résidu de f en z_0 , qu'on note $Res(f, z_0)$, le coefficient de $\dfrac{1}{z - z_0}$ dans le développement de Laurent. Donc

$$Res(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(s) ds$$

γ est un lacet contournant la singularité.
(i.e. $Res(f, z_0)$ est la seule chose qui reste après intégration)

Calcul pratique d'un résidu

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

* Si la fonction admet un pôle simple z_0.
On a $f(z) = \dfrac{g(z)}{z - z_0}$ donc :

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} h(z)$$

où $h(z) = (z - z_0)f(z)$

Cas particulier

Si $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$

$P(z_0) \neq 0$ et $Q(z_0) \neq 0$

$Res(f, z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)f(z) = \lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)\dfrac{P(z)}{Q(z)}$

$= \lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)\dfrac{P(z)}{\dfrac{Q(z) - Q(z_0)}{z - z_0}} = \dfrac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$

* Si la fonction admet un pôle double en z_0.

$$Res(f, z_0) = \frac{dh}{dz}(z_0)$$

* Si la fonction admet un pôle d'ordre k en z_0.

$$Res(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{(k-1)}h}{d^{(k-1)}z}(z_0)$$

4.3.2 Théorèmes des résidus et applications

Théorème 4.3.1 *Théorèmes des résidus*
Soit Ω un ouvert étoilé de $\mathbb{C}$ et $z_1,z_2,\ldots,z_n$ des pôles d'une fonction f holomorphe sur Ω et soit γ^+ un lacet entourant les pôles $z_1,z_2,\ldots,z_n$, alors :

$$\int_{\gamma^+} f(z)dz = \sum_{i=1}^{n} Res(f, z_i)$$

Exemple

1. Calculer $I = \displaystyle\int_{\gamma^+} \frac{dz}{z^2(z-1)}$, où $\gamma = \{z \in \mathbb{C} :\mid z \mid= \frac{1}{2}\}$.

   La fonction à intégrer admet un seul pôle double à l'intérieur de γ, c'est 0.

   Donc $\displaystyle\int_{\gamma^+} \frac{dz}{z^2(z-1)} = 2i\pi.Res(f, 0)$

   On a $f(z) = \dfrac{dz}{z^2(z-1)}$ et $h(z) = z^2 f(z) = \dfrac{1}{z}$ et comme f est une fonction rationnelle on a :

   $Res(f, 0) = \dfrac{d}{dz}[\dfrac{1}{z-1}](0) = -1.$

   D'où $I = \displaystyle\int_{\gamma^+} \frac{dz}{z^2(z-1)} = -2i\pi$

2. Calculer $I = \displaystyle\int_{\gamma^+} \frac{e^z dz}{z-2}$, où $\gamma = \{z \in \mathbb{C} :\mid z \mid= 1\}$.

   f est holomrphe dans $D(O, 1)$ donc $I = \displaystyle\int_{\gamma^+} \frac{e^z dz}{z-2} = 0$

3. Calculer $I = \int_{\gamma^+} \frac{e^z dz}{2z-1}$, où $\gamma = \{z \in \mathbb{C} :\mid z \mid = 1\}$.

4. Calculer $I = \int_{\gamma^+} \frac{dz}{(z^4+1)(z+3)}$, où où γ est le cercle de centre O et de rayon $R > 1$.

   Les racines de z^4+1 sont $z_k = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{4}}$, k=0,1,2,3. Et f admet quatre pôles simples dont seuls,z_1 et z_2, sont entourées par γ.

   Donc $I = \int_{\gamma^+} \frac{dz}{(z^4+1)(z+3)} = Res(f, z_1) + Res(f, z_2)$.
   f est une fonction rationnelle donc :
   $Res(f, z_1) = \frac{P(z_1)}{Q'(z_1)} = \frac{1}{4z_1^3} = \frac{1}{4}e^{i\frac{-3\pi}{4}}$ et
   $Res(f, z_1) = \frac{P(z_2)}{Q'(z_2)} = \frac{1}{4z_2^3} = \frac{1}{4}e^{i\frac{-\pi}{4}}$.
   Par suite $I = \int_{\gamma^+} \frac{dz}{(z^4+1)(z+3)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$.

Remarque 4.3.1

Etude du comportement de l'intégrale : $I = \int_{\gamma^+} \frac{dz}{(z^4+1)(z+3)}$

4.3.3 Calcul d'intégrales par la méthode des résidus

Il y a plusieurs situations pour calculer une intégrales par la méthode des résidus. On peut citer quatre situations :

4.3.3.1 Première situation

$I = \int_0^{2\pi} f(\sin(t), \cos(t))dt$, f n'a pas de pôle sur le cercle unité.
On pose $z = e^{it}$; donc $dz = izdt$, $\cos(t) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ et $\sin(t) = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})$.Calculons

$$I = \int_{|z|=1} f[\frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z}), \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})]\frac{dz}{2i}$$

donc $I = 2i\pi \sum Res\{\frac{1}{iz}f[\frac{1}{2i}(\frac{z^2-1}{2z}, \frac{z^2-1}{2z})]\}$
La somme étant étendue aux pôles contenus dans le disque unité.

Exemple : $I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\sin(t)} = \sum$

4.3.3.2 Deuxième situation

$I = \int_0^{2\pi} f(x)dx$, f est une fonction rationnelle n'a sans pôle sur le cercle unité